

Цепи постоянного тока

Бычков А.И., Крюков П.А.

Для 8 и 9 классов
ФИЗИКО-МАТЕМАТИЧЕСКИХ ШКОЛ

Содержание

1 Введение	2
2 Базовые теоретические сведения	5
3 Основные понятия	7
4 Симметричные схемы	13
5 Перемычки и амперметры	18
6 Электроизмерительные приборы	21
7 Работа и мощность тока. ЭДС.	26
8 Вольт-амперные характеристики.	30
9 Преобразование треугольник-звезда	37
10 Измерения в электрических цепях	39
11 Разные задачи	41
12 Приложения	42
12.1 Об электродвижущих силах	42
12.2 О нелинейных элементах	44
13 Ответы, решения	47
13.1 Основные понятия.	47
13.2 Симметричные схемы. Ответы.	49
13.3 Перемычки и амперметры	50
13.4 Электроизмерительные приборы.	51
13.5 Работа и мощность тока.	53
13.6 Вольт-амперные характеристики	55
13.7 Треугольник-звезда, измерения, разные	58
14 Ссылки на полезные статьи	60

1 Введение

Задачник предназначен, главным образом, для восьмиклассников и девятиклассников и включает в себя учебные материалы для углублённого изучения темы «Электричество». По мнению авторов, расчёту цепей постоянного тока имеет смысл уделять много времени именно в восьмом классе. В курсе электродинамики 10 класса представляется целесообразным акцентировать внимание на других темах, например, на электростатике или магнитостатике.

Существует несколько причин, по которым тема «Электрические цепи постоянного тока» является удобной для углубленного изучения в 8 и 9 классах. Во-первых, для решения задач школьникам достаточно освоить простой теоретический материал. Многие важные следствия основных положений (например, условие балансировки моста Уитстона) могут быть сформулированы в виде несложных задач. Во-вторых, тема допускает проведение простых и наглядных опытов и экспериментов, также есть много практических задач с примерами из повседневной жизни. Скажем, обычная лампочка накаливания обладает нелинейной вольт-амперной характеристикой, что легко обнаружить, сравнив её сопротивление, измеренное омметром, с вычисленным по значениям номинальной мощности и напряжения. В-третьих, существует множество модельных конфигураций, на которых можно совершенствовать навыки. Самостоятельное решение школьниками большого количества разнообразных задач является необходимым условием для успешного освоения предмета. В процессе решения формируется индивидуальное физическое мышление ученика, а также накапливается личный опыт преодоления трудностей.

Авторы попытались сделать задачник самодостаточным: необходимый теоретический материал излагается в разделе 2 «Базовые теоретические сведения» и в приложениях. Приводятся ссылки на книги и статьи, которые могут оказаться полезными как для школьников, так и для педагогов.

В сборнике наряду с переработанными и адаптированными классическими задачами представлены новые и оригинальные. Также есть задачи, заимствованные из других задачников или вариантов физических олимпиад. Такие задачи в подавляющем большинстве случаев помечаются комментарием в скобках после номера задачи. Возможно, некоторые заимствованные задачи даны без пометок. В случае если таковые обнаружатся, авторы просят уведомить их об этом. Полный список расшифровок пометок приводится ниже.

Все задачи разбиты на 6 основных тем и 3 факультативные. Каждая из основных тем делится на несколько частей: «Тренировочные задачи», «Основные задачи», «Дополнительные задачи». Исключение составляет первая тема «Основные понятия», в которой отсутствует деление на тренировочные и дополнительные задачи, в связи с ее общеобразовательным характером, призванным закрепить базовые теоретические знания. В факультативных темах пока не так много задач, как в основных. Однако, задачник постоянно дорабатывается и дополняется. Рядом с некоторыми задачами на полях мы ставим значки со следующей смысловой нагрузкой.

Задачу имеет смысл разобрать в классе в качестве примера. Подходит для коллективного обсуждения. В случае самостоятельной работы после обдумывания рекомендуется разобрать решение.

 Задача повышенной сложности. Очень субъективная авторская оценка.

 Бомба. Задача сильно повышенной сложности. По мнению авторов.

Вёрстка выполнена в системе [TeX Live](#) с использованием редактора [Texmaker](#) в соответствии с представлениями авторов о прекрасном. Исходные файлы могут быть предоставлены по электронной почте в случае аргументированного запроса. Вместе с тем, авторы оставляют за собой право отказать без объяснения причин.

Авторы с интересом ознакомятся с отзывами о своей работе, а также будут благодарны за замечания и предложения по улучшению.

10 апреля 2018 года

Бычков Алексей Игоревич
bychkov.i.aleksey@gmail.com

Крюков Пётр Алексеевич
free.physics.school@gmail.com

Список сокращений

<i>Козел</i>	Баканина Л.П., Козел С.М., Белонучкин В.Е. (под ред. Козела С.М.) Сборник задач по физике. (.djvu, 2 МБ) Для 10-11 кл. с углубленным изучением физики. М.: Вербум-М, 2003.
<i>Зильберман</i>	Зильберман А.Р. Школьные физические олимпиады (.pdf, 1,5 МБ) М.: МЦНМО, 2016.
<i>Савченко</i>	Воробьев И.И. и др.; Под ред. О.Я.Савченко. Задачи по физике (.pdf, 5,2 МБ) Новосибирск: Новосибирский государственный университет, 1999.
<i>МосГор, 1972-1985</i>	Буздин А.И., Ильин В.А., Кривченков И.В. и др. Задачи московских физических олимпиад. (.pdf, 3,8 МБ) М.: Наука, 1988.
<i>Адыгее</i>	Аракелов А.В., Жукова И.Н., Малых В.С. Физические олимпиады в Адыгее (1999–2004 гг.) Майкоп: Полиграф-Юг, 2010.
<i>МосГор</i>	Московская олимпиада школьников по физике. Ранее называлась: Московская городская олимпиада школьников по физике.
<i>Рег.этап</i>	Региональный этап Всероссийской олимпиады школьников по физике. До 2008 года также и федеральный окружной этап. Задания на сайте: 4ipho.ru
<i>Финал</i>	Финальный этап Всероссийской олимпиады школьников по физике. Задания на сайте: 4ipho.ru
<i>Максвелл</i>	Всероссийская олимпиада по физике имени Дж. К. Максвелла Задания на сайте: 4ipho.ru (7-8 классы)
<i>Физтех мод.</i>	Физико-математическая олимпиада «Физтех» Задача была модифицирована, изменена. Незначительно отличается от исходного варианта.

2 Базовые теоретические сведения

Сила тока или **ток** I — отношение количества заряда Δq , проходящего через поперечное сечение проводника за время Δt , к времени Δt :

$$I = \frac{\Delta q}{\Delta t}.$$

Закон сохранения заряда: сумма токов втекающих в узел (точка соединения нескольких проводников), равна сумме токов истекающих, см. рисунок 1.

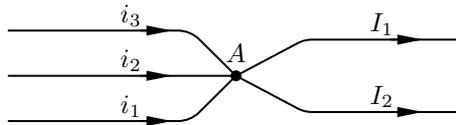


Рис. 1: A — узел; i_1, i_2, i_3 — втекающие токи, I_1, I_2 — истекающие: $i_1 + i_2 + i_3 = I_1 + I_2$.

Напряжение U_{AB} или **разность потенциалов** $\Delta\varphi_{AB} = \varphi_A - \varphi_B$ между точками A и B — отношение работы сил электрического поля A_{AB} по перемещению заряда q из A в B к величине этого заряда q .

$$U_{AB} = \varphi_A - \varphi_B = \frac{A_{AB}}{q}.$$

Работа электрического поля не зависит от вида траектории, по которой движется заряд, перемещаясь из A в B , так что напряжение между концами любых проводников соединяющих две точки будет одинаковым, рисунок 2.

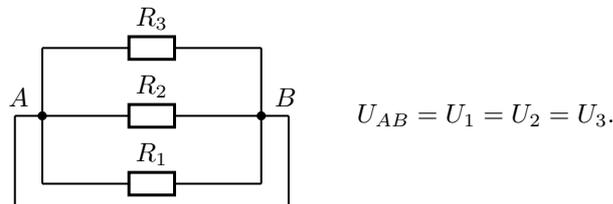


Рис. 2: На всех резисторах подключенных к точкам A и B — одинаковое напряжение.

Определение дано для разности потенциалов точек $\Delta\varphi_{AB}$, поэтому говорить о потенциале одной точки (например, φ_A) можно только относительно потенциала другой. При решении задач обычно задают точку с нулевым потенциалом.

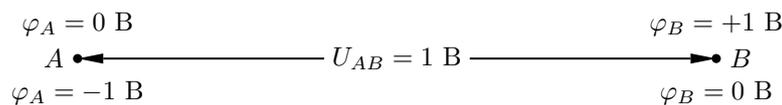


Рис. 3: Напряжение между A и B равно 1 В, однако потенциалы точки A могут быть разными в зависимости от выбора точки с нулевым потенциалом.

Закон Ома:

$$U_{AB} = \varphi_A - \varphi_B = IR.$$

Напряжение на резисторе равно произведению тока через него на его сопротивление.

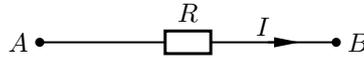


Рис. 4: Ток течёт из точки с большим потенциалом в точку с меньшим: $\varphi_B = \varphi_A - IR$.

Удельное сопротивление σ количественно характеризует электропроводные свойства вещества проводника. Зная длину L и площадь сечения S , перпендикулярного направлению тока, можно определить сопротивление проводника:

$$R = \sigma \frac{l}{S}.$$

Идеальный источник тока или **идеальная батарейка** поддерживает на выводах постоянную разность потенциалов, которая не зависит от тока в подводящих проводах: $\varphi_B - \varphi_A = U_0$.

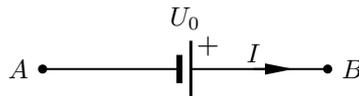


Рис. 5: Потенциал положительного полюса выше потенциала отрицательного.

Идеальный проводник обладает нулевым сопротивлением.

Идеальный амперметр — это прибор, который показывает текущий через него ток. Сопротивление идеального амперметра равно нулю, он также является идеальным проводником. Сопротивление **реального амперметра** не равно нулю.

Идеальный вольтметр измеряет напряжение (или разность потенциалов) между точками, к которым подключен. Ток через идеальный вольтметр пренебрежимо мал.

Реальный вольтметр с собственным сопротивлением R_V , через который течёт ток I , показывает: $U_V = IR_V$.

Закон Джоуля определяет работу, совершаемую силами электрического поля, по поддержанию постоянного тока I в проводнике, напряжение между концами которого равно U в течение времени Δt :

$$A = UI\Delta t.$$

В металлах эта работа идёт на увеличение внутренней энергии, иначе говоря, выделяется в виде тепла:

$$Q = UI\Delta t = \frac{U^2}{R}\Delta t = I^2R\Delta t.$$

Теоретический материал, необходимый для решения задач, в которых используются понятия электро-движущей силы (ЭДС) и дифференциального сопротивления нелинейного элемента излагается в приложениях.

3 Основные понятия

1. Через поперечное сечение специального провода пролетает 10^{12} (один триллион) электронов в секунду. Какой ток течёт по проводу? Заряд одного электрона (без учёта знака): $e = 1,6 \cdot 10^{-19}$ Кл.
- 💡 2. После поворота ключа зажигания автомобиля стартёр — электродвигатель, подключенный к аккумулятору, — раскручивает основной двигатель внутреннего сгорания. При этом в течение времени $t_0 = 3,6$ с ток через стартёр линейно возрастает от нуля до максимального значения в 200 А, а затем линейно убывает до нуля. Какой заряд при этом проходит через аккумулятор? Какую часть (в %) составляет этот заряд от полного заряда аккумулятора в 50 Ампер · час ?
- 🔍 3. Найдите скорость упорядоченного движения электронов в проводе сечением $S = 2,5 \text{ мм}^2$ при силе тока $I = 1 \text{ А}$, если количество электронов проводимости в расчёте на 1 м^3 материала провода: $n = 2,5 \cdot 10^{28} \text{ 1/м}^3$.
4. Компьютерный блок питания создаёт на выходящих из него проводах потенциалы: 0 В (чёрный провод), +3,3 В (оранжевый), +5 В (красный), +12 В (жёлтый). Идеальный вольтметр подключают к двум проводам разных цветов. Сколько может быть различных значений (без учёта знака) измеренного напряжения? Определите эти значения.
5. Провод длиной $L = 10 \text{ м}$ присоединяют к выводам идеального источника с напряжением $U_0 = 10 \text{ В}$. Изобразите графически зависимость потенциала точки провода от длины провода между этой точкой и отрицательным полюсом источника. Считайте, что потенциал равен нулю: на отрицательном полюсе; на положительном; в середине.
6. Для устройства электропроводки в новой квартире купили 80 м двухжильного медного кабеля с сечением одной жилы $S = 2,5 \text{ мм}^2$. Удельное сопротивление меди: $\rho = 1,75 \cdot 10^{-8} \text{ Ом} \cdot \text{м}$. Определите суммарное сопротивление проводов кабеля. Сравните с сопротивлением нагревательного элемента электрического чайника: $R_0 = 25 \text{ Ом}$.
7. Проводники печатных плат (повсеместно используются для монтажа элементов электронной аппаратуры; пример — материнская плата компьютера) представляют собой полоски медной фольги толщиной $d = 18 \text{ мкм}$, расположенные на изолирующей основе. Рассмотрим проводник шириной $b = 1 \text{ мм}$. Какой должна быть длина этого проводника, чтобы его сопротивление оказалось равно 1 Ом? Удельное сопротивление меди можно считать равным $1,8 \cdot 10^{-8} \text{ Ом} \cdot \text{м}$.
- 🔍 8. Для измерения сопротивления тела человека собрали цепь, состоящую из: батарейки (напряжение на выводах 7,75 В), цифрового амперметра и двух плоских электродов, представляющих собой сложенные листы алюминиевой фольги. Касаясь электродов ладонями рук, человек замыкает цепь и в ней возникает ток, который измеряется амперметром. Сопротивление тела можно вычислить, разделив напря-

жение батарейки на значение тока. При измерениях обнаружилось, что ток через амперметр зависит от силы, с которой человек давит на электроды, расположенные на горизонтальной поверхности стола. При сильном нажатии измеренный ток достигал значения 1,6 мА; при слабом оказывался в 2-3 раза меньше. Как вы думаете, почему? Попробуйте сделать этот опыт самостоятельно.

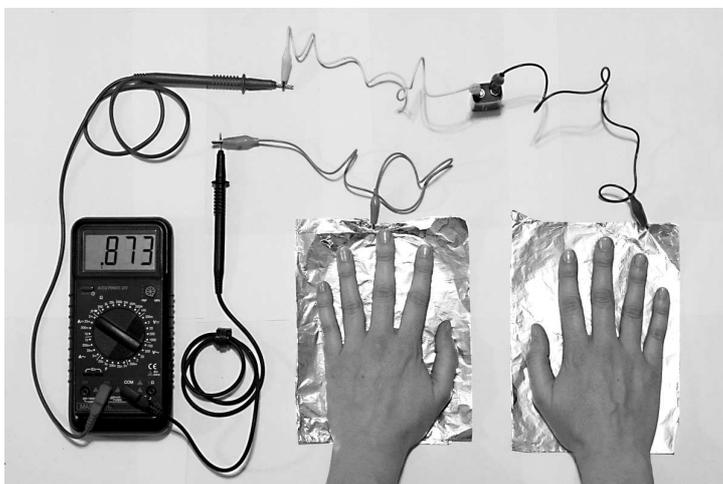


Рис. 6

9. Определите токи через резисторы в схемах, показанных на рис. 7. Знаком, похожим на перевёрнутую букву «Т» обозначается заземление — точка с нулевым потенциалом. Значения сопротивлений указаны в Ом.

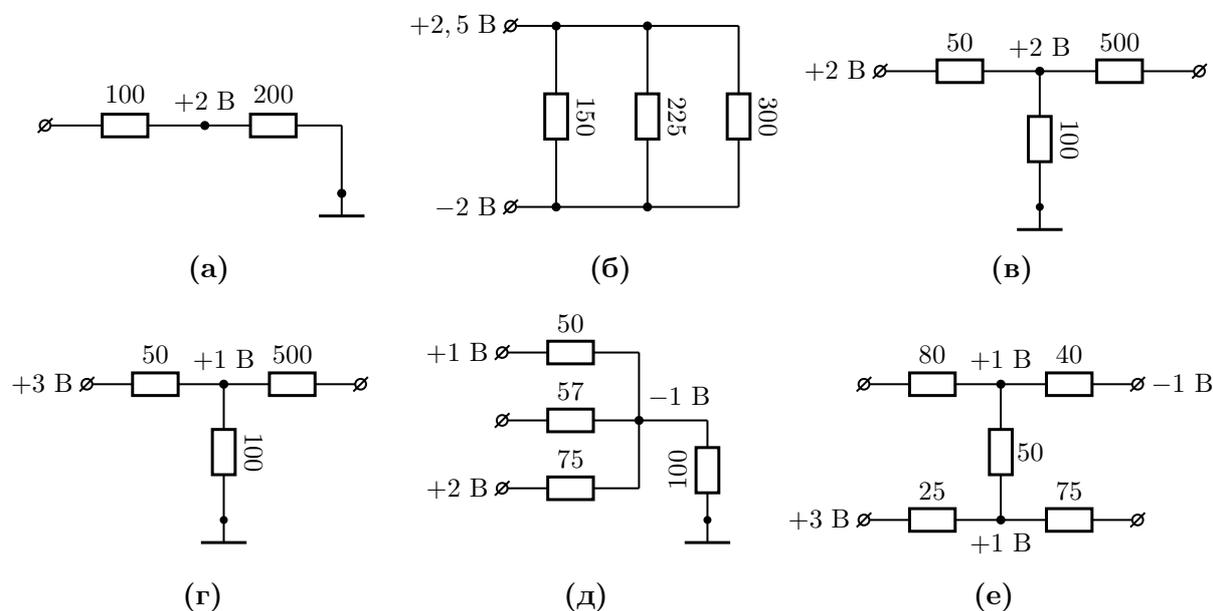


Рис. 7

10. Докажите, что при параллельном соединении двух резисторов R_1 и R_2 отношение токов через них равно обратному отношению сопротивлений: $i_1/i_2 = R_2/R_1$.

11. Определите напряжение между выводами A и B схем, показанных на рисунке 8. Значения сопротивлений указаны в Ом.

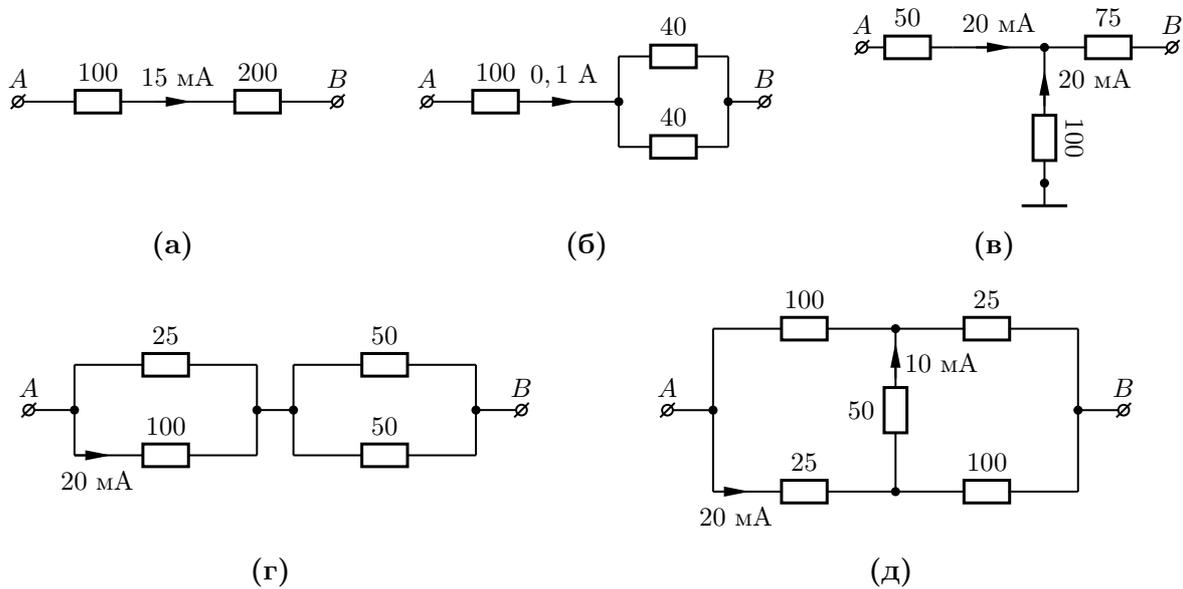


Рис. 8

12. а) Докажите, что участок цепи, состоящий из последовательного соединения двух резисторов R_1 и R_2 , эквивалентен одному резистору с сопротивлением:

$$R_0 = R_1 + R_2.$$

б) Докажите, что при параллельном соединении резисторов R_1 и R_2 для эквивалентного сопротивления R_0 справедливы соотношения:

$$\frac{1}{R_0} = \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} \text{ или } R_0 = \frac{R_1 R_2}{R_1 + R_2}.$$

13. Докажите, что при параллельном соединении n резисторов R_1, R_2, \dots, R_n эквивалентное сопротивление R_0 меньше любого из R_1, R_2, \dots, R_n .

14. Определите эквивалентное сопротивление цепей, показанных на рисунке 9.

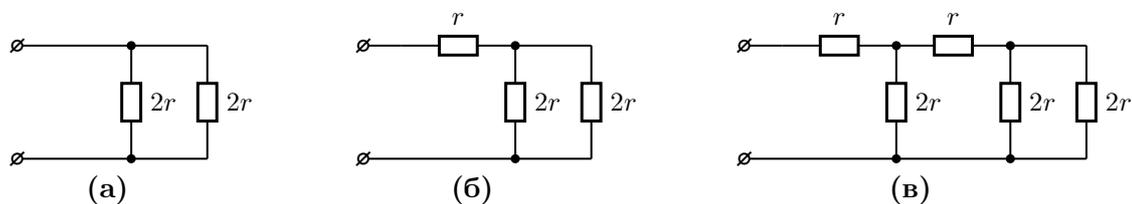


Рис. 9

15. Три одинаковых резистора соединили сначала последовательно, а потом параллельно. Во сколько раз изменилось сопротивление?

- 16.** (Мосгор, 1972-1987) В деревянную доску вбили два гвоздика и намотали на них 20 витков нихромовой проволоки, закрепив концы на одном из гвоздиков. Чему равно сопротивление между гвоздиками, если омметр (прибор для измерения сопротивлений), подключенный к концам размотанной проволоки, разложенной на полу без пересечений, показывает 16 Ом?
- 17.** Какие сопротивления можно получить, соединяя разными способами три резистора сопротивлением 6 кОм?
- 18.** Имеется идеальная батарейка с напряжением на выводах $U_0 = 9$ В и три резистора с сопротивлениями: 1 кОм, 2 кОм, 3 кОм. Известно, что к батарейке подключены, соединённые между собой некоторым образом, все эти резисторы. Чему равен максимально возможный при этих условиях ток через батарейку? А минимально возможный? Резисторы должны быть соединены так, чтобы при подключении к батарейке, через каждый из них тек ток.
- 19.** Из куска проволоки сопротивлением $R = 36$ Ом сделано кольцо. В каких точках кольца следует присоединить омметр (прибор для измерения сопротивлений), чтобы его показания оказались равны: $r_1 = 9$ Ом; $r_2 = 8$ Ом? Какова максимально возможная величина сопротивления между двумя точками этого кольца?
- 20.** Для схем, изображённых на рисунке 10, определите напряжение U_0 , ток через источник I_0 и разность потенциалов между точками A и B : $\Delta\varphi_{AB} = \varphi_A - \varphi_B$.

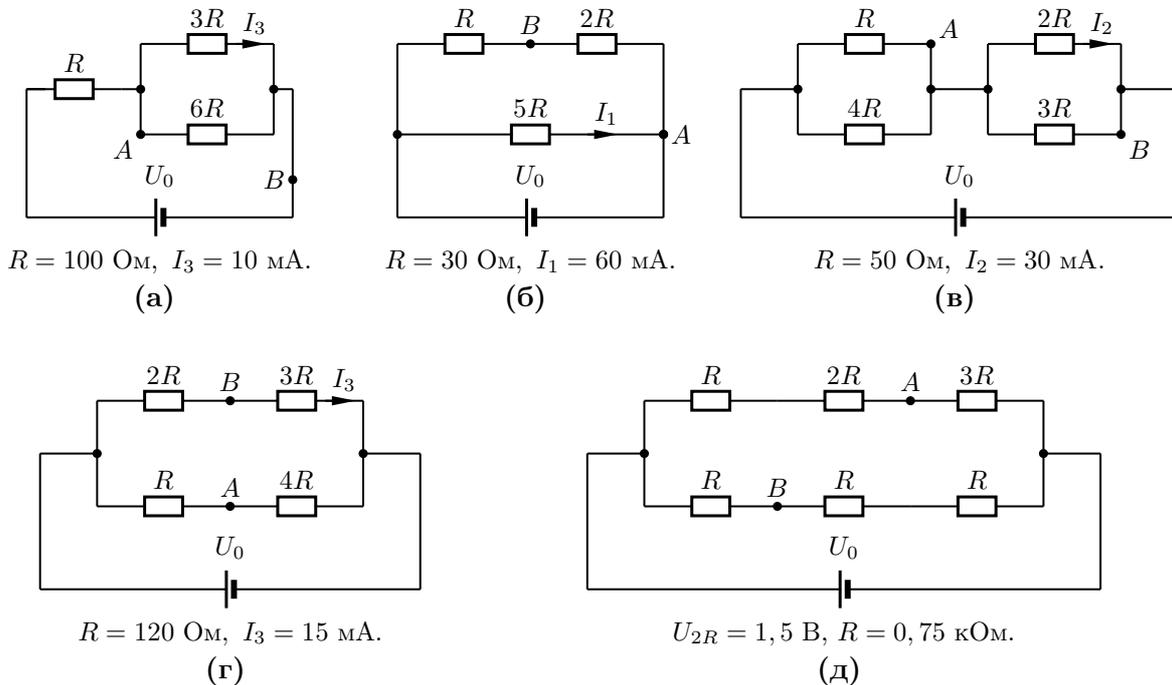
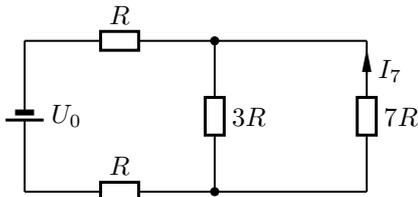


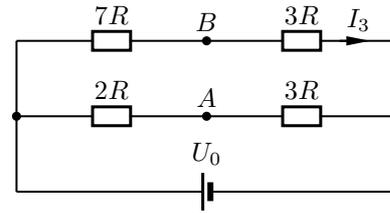
Рис. 10

- 21.** Определите U_0 и R в схемах, показанных на рисунках 11 и 12.



$U_R = 1 \text{ В}, I_7 = 30 \text{ мА}.$

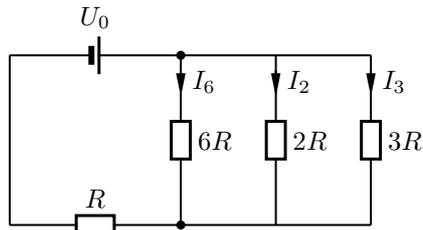
Рис. 11



$\varphi_A - \varphi_B = 1,5 \text{ В}, I_3 = 1 \text{ мА}.$

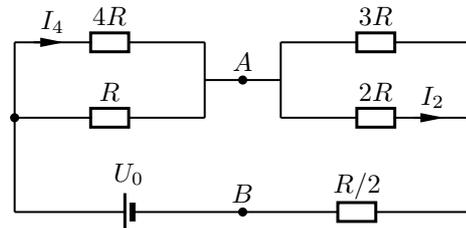
Рис. 12

22. Определите обозначенные токи в схемах, показанных на рисунках 13 и 14.



$U_0 = 9 \text{ В}, R = 150 \text{ Ом}.$

Рис. 13



$\varphi_A - \varphi_B = 1,7 \text{ В}, R = 200 \text{ Ом}.$

Рис. 14

23. Определите сопротивление R_x в схеме на рис. 15, если остальные, указанные на рисунке параметры схемы известны, а ток в проводнике AB равен нулю.

24. Определите сопротивление R_x в схеме на рис. 16, если остальные, указанные на рисунке параметры схемы известны, а разность потенциалов между точками A и B равна нулю.

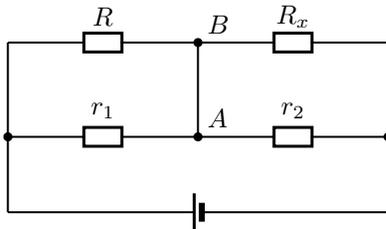


Рис. 15

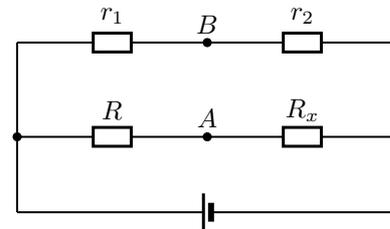


Рис. 16



25. Определите сопротивление цепей, показанных на рисунке 17.

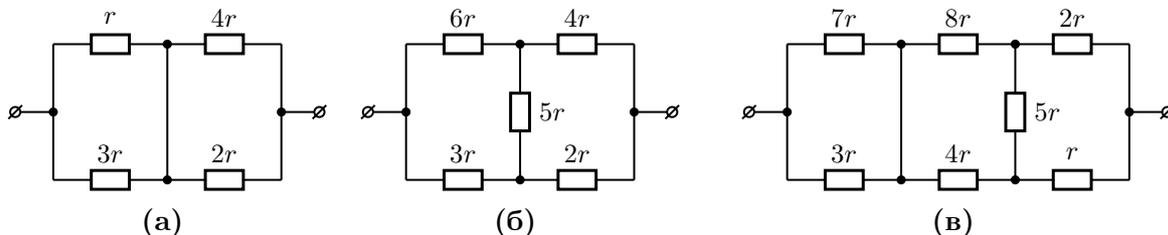


Рис. 17

- 💡 **26.** Определите показания идеальных приборов в цепях, изображенных на рисунке 18, если на выводы каждой схемы подано напряжение 9 В, а $r = 90$ Ом.

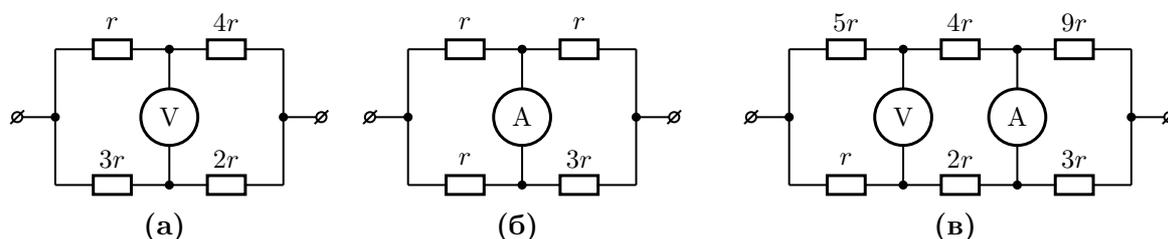


Рис. 18

- 💡 **27.** Имеется 10 резисторов сопротивлением 1 кОм. Нарисуйте схему электрической цепи, составленной из этих резисторов, сопротивление которой равно 1,7 кОм.
 а) Можно использовать не все резисторы.
 б) Необходимо использовать все резисторы. При подключении цепи к источнику питания через каждый из резисторов должен течь ток.

- 🔍 **28.** Есть 10 резисторов сопротивлением R . Попробуйте, используя все эти резисторы, получить сопротивление максимально близкое к $R\sqrt{2}$. При подключении к источнику питания через каждый из резисторов должен течь ток.

Примечание: вариантов много, можно весьма точно получить $R\sqrt{2}$.

- 29.** Электрочайник рассчитан на напряжение 220 В. Его номинальная мощность 2,2 кВт. Определите сопротивление нагревательного элемента чайника и силу тока, текущего через него при работе в расчётном режиме.

4 Симметричные схемы

Во всех задачах, если специально не оговаривается обратное: вольтметры, амперметры и батарейки — идеальные.

Тренировочные задачи

○ **30.** В схеме, изображённой на рисунке 19, $r = 100$ Ом. К выводам A и B подключен блок питания, так что $U_{AB} = 22$ В.

а) Почему через резисторы с одинаковым сопротивлением текут одинаковые токи? Докажите, что $U_{2r} = U_{3r}$. Докажите, что: $U_r + U_{3r} = U_{AB}/2$.

б) Преобразуйте (перерисуйте) схему так, чтобы в ней остались только параллельные и последовательные соединения резисторов.

в) Найдите ток через блок питания I_{AB} .

г) Определите ток I_{3r} через резистор $3r$ и напряжение U_{2r} на резисторе $2r$.

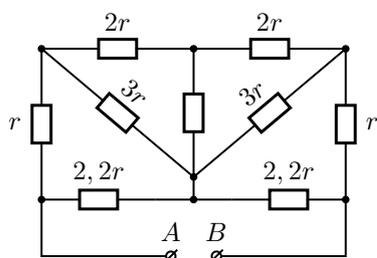


Рис. 19

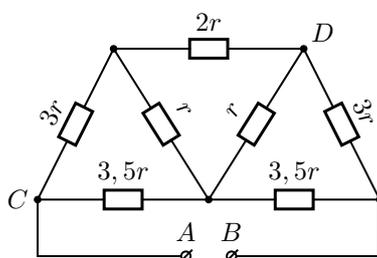


Рис. 20

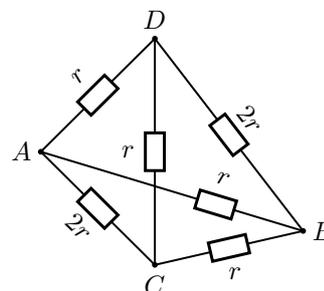


Рис. 21

31. Выводы A и B схемы, изображённой на рисунке 20, подключены к идеальной батарейке с напряжением $U_0 = 3,5$ В, $r = 100$ Ом.

а) Почему на резисторах с одинаковым сопротивлением напряжение будет также одинаковым? Верно ли, что $U_r = U_{3r}$?

б) Преобразуйте схему так, чтобы в ней остались только параллельные и последовательные соединения резисторов.

в) Найдите ток через батарейку I_{AB} .

г) Найдите показания вольтметра, подключенного: параллельно резистору $3r$; параллельно резистору r ; к точкам C и D схемы.

32. В тетраэдре из резисторов на рисунке 21 сопротивление $r = 60$ Ом.

а) Мы хотим определить сопротивление между точками B и D . Для этого представим, что к B и D подключена батарейка и рассмотрим распределение токов. Через какие резисторы текут одинаковые токи? Верно ли, что $U_{BC} = U_{BA}$? Преобразуйте схему, определите R_{BD} .

б) Чему равно R_{AC} ?

в) Напряжение батарейки, подключенной к B и D равно 6 В. Определите токи через резисторы и ток через батарейку.

Основное задание

33. Сопротивление всех проводников на рисунке 22 одинаковое и равно 1 Ом.

- а) Чему равно сопротивление между точками A и D ?
 б) Найдите сопротивление между точками A и B , A и C .

34. В схеме на рис. 23 напряжение на выводах батарейки $U_0 = 5$ В. Определите показания вольтметра, подключенного к точкам: B и C ; A и C . Сопротивление металлических стержней, соединяющих любые соседние узлы, одинаковое.

35. Пятиконечную звезду, показанную на рисунке 24, спаяли из специальных проводочек, таких что сопротивление проводочки, соединяющей любые соседние узлы, равно r .

- а) Найдите сопротивление между точками: C и D ; B и E .
 б) Чему равно сопротивление между точками: A и F ?

36. Батарейку с напряжением U_0 и вольтметр подсоединили к узлам пятиконечной звезды, описанной в предыдущей задаче так, как показано на рисунке 25. Определите показания вольтметра, ток через батарейку и ток через проводник, соединяющий A и B .

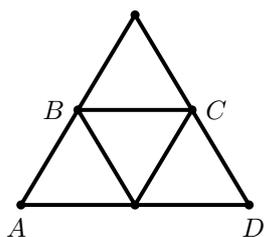


Рис. 22

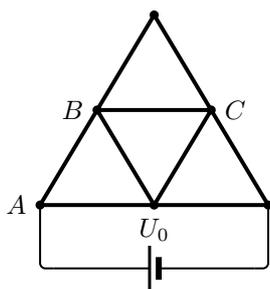


Рис. 23

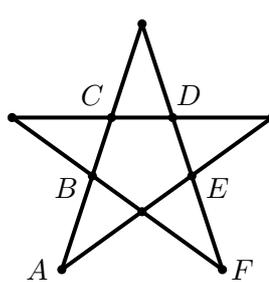


Рис. 24

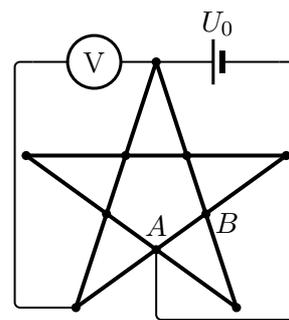


Рис. 25

37. Сопротивление всех проводников на рисунке 26 одинаковое и равно 48 Ом.

- а) Чему равно сопротивление между: B и C ; A и D ?
 б) Найдите сопротивление между B и E ; O и A .

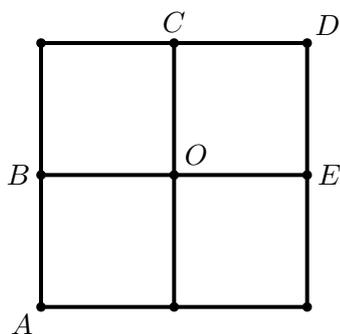


Рис. 26

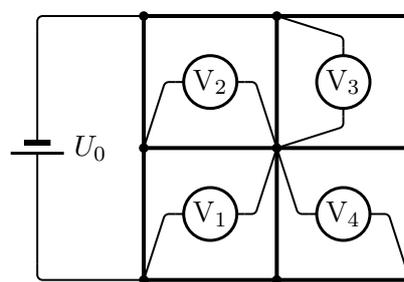


Рис. 27

38. К узлам сетки из задачи 8 подключили батарейку с $U_0 = 12$ В и 4 вольтметра (см. рис. 27). Определите показания приборов.

39. В шестиугольнике (см. рис. 28) сопротивление всех проводников равно r .

а) Найдите сопротивление между вершинами: A и C ; A и B .

б) Определите сопротивление между точкой O и любой вершиной.

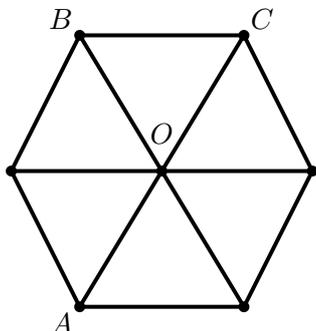


Рис. 28

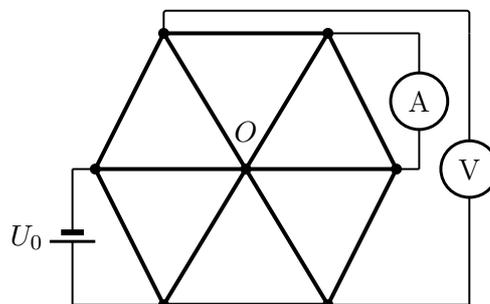


Рис. 29

40. К шестиугольнику, изготовленному из проволок одинакового сопротивления R , подключили идеальные вольтметр, амперметр и батарейку с напряжением U_0 на выводах (см. рис. 29). Определите показания приборов.

41. В правильной четырёхугольной пирамиде (см. рис. 30), изготовленной из металлических стержней, сопротивление стороны основания равно R , а сопротивление бокового ребра в два раза меньше.

а) Найдите сопротивление между точками A и B .

б) Чему равно сопротивление между A и S ?

42. В проволочном кубе (см. рис. 31) сопротивление любого ребра равно r .

а) Определите сопротивление между точками A и C .

б) Найдите сопротивление между вершинами A и C' .

в) Определите сопротивление между точками A и D .

43. Идеальные батарейку U_0 и вольтметр подключают к проволочному кубу, сопротивление стороны которого равно r (см. рис. 32). Что показывает вольтметр? Определите самый большой ток через ребро куба и самый маленький.

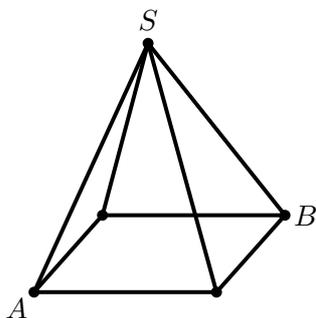


Рис. 30

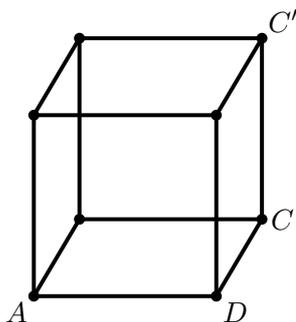


Рис. 31

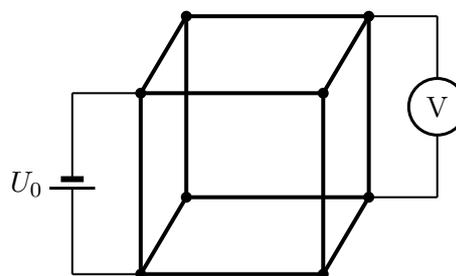


Рис. 32

44. Рёбра некоторого многогранника — проволочки, при этом вне зависимости от длины сопротивление всех рёбер одинаковое и равно R . Батарея подключена к

двум вершинам многогранника A и B . Из вершины A выходит m рёбер. Столько же выходит из вершины B . Токи во всех этих рёбрах одинаковые.

а) Пусть $m = 3$, нарисуйте многогранники, удовлетворяющие условиям задачи. Чем больше, тем лучше! Для каждого нарисованного вами многогранника найдите сопротивление между A и B .

б) Тот же вопрос для $m = 5$.

Дополнительные задачи

 **45.** (Рег.этан, 2010, 10 кл.) Из трёх проволок, каждая из которых имеет сопротивление $R = 96$ Ом, сделали три кольца и соединили их в «сферический резистор» так, что длина участка между любыми двумя ближайшими узлами одинакова (см. рис. 33). Чему равно сопротивление R_{AB} конструкции между узлами A и B ? Чему равно сопротивление R_{AC} ?

 **46.** (МосГор, 2012, 9 кл.) Из проволоки сделали правильную треугольную пирамиду (рис. 34), все рёбра которой имеют одинаковую длину и сопротивление r . К серединам двух противоположных взаимно перпендикулярных рёбер подсоединили выводы A и B омметра — прибора для измерения сопротивлений. Что покажет омметр?

 **47.** (Рег.этан, 2016, 9 кл.) Куб собран из одинаковых резисторов сопротивлением R . Два резистора заменили на идеальные перемычки, как указано на рисунке 35.

а) Найдите сопротивление получившейся системы между контактами A и B .

б) Какие резисторы из оставшихся можно убрать, чтобы это не изменило общего сопротивления системы?

в) Вычислите силу тока в подводящих проводах, подсоединённых к узлам A и B , если известно, что через большинство резисторов в цепи течет ток $I = 2$ А.

г) Вычислите силу тока, текущего через идеальную перемычку AA' .

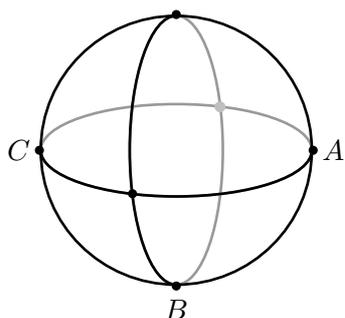


Рис. 33

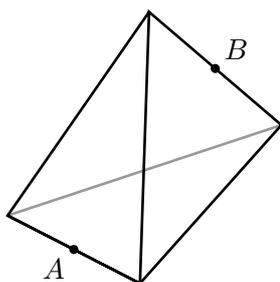


Рис. 34

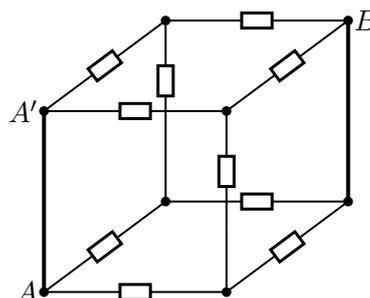


Рис. 35

 **48.** (Фольклор) N точек соединены друг с другом одинаковыми проводниками с сопротивлением R . Определить эквивалентное сопротивление схемы между двумя соседними точками.

 **49.** (МосГор, 2017, 10 кл.) Определите сопротивление R_{AB} между точками A и B проволочной сетки, показанной на рисунке 36. Сопротивление каждого из проводни-

ков (вне зависимости от его длины), из которых спаяна сетка, равно R . Места спайки проводников обозначены точками. В центре сетки электрический контакт отсутствует.

💡 **50.** (МосГор, 2008, 9 кл.) Найти сопротивление электрической цепи между точками A и B (см. рис. 37). Сопротивление стороны большого шестиугольника равно r , сопротивление стороны малого шестиугольника равно $r/2$, сопротивление каждого внутреннего проводника, заключенного между шестиугольниками, равно $r/2$, а сопротивление каждого проводника, находящегося внутри малого шестиугольника, равно $r/4$.

💡 **51.** (Рег.этан, 2002, 9 кл.) Найдите сопротивление цепи между точками A и B (рис. 38). Сопротивления всех резисторов одинаковы и равны $R = 5$ Ом.

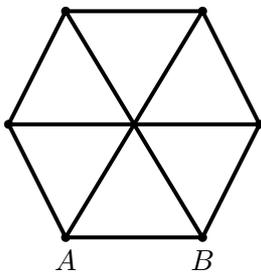


Рис. 36

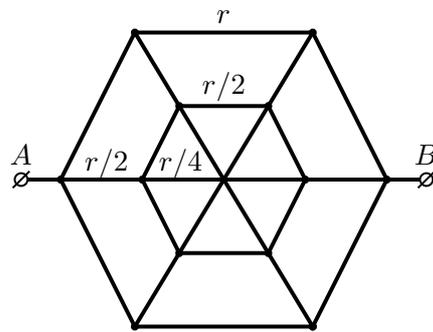


Рис. 37

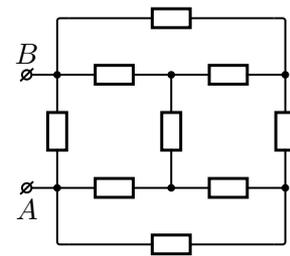


Рис. 38

5 Перемычки и амперметры

Во всех задачах, если специально не оговаривается обратное:

- перемычки — провода без сопротивления;
- сопротивление амперметров много меньше сопротивления резисторов;
- все батарейки идеальные.

Тренировочные задачи

52. Посмотрите на рис. 39 и укажите бесполезные сопротивления на рис. 58.

53. В схеме на рисунке 40 сопротивление $r = 100$ Ом. Напряжение на выводах батарейки $U_0 = 6$ В. а) Определите показания амперметра A_1 . б) Вместо перемычки CD поставили амперметр A_2 . Что он показывает?

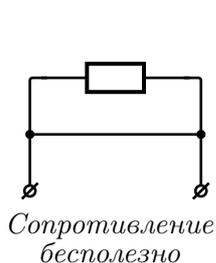


Рис. 39

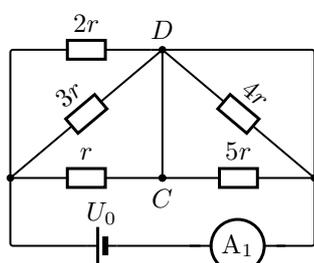


Рис. 40

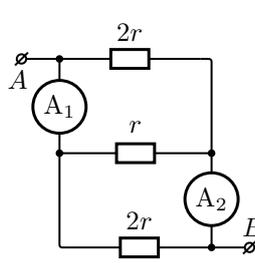


Рис. 41

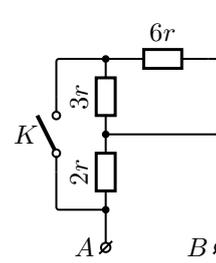


Рис. 42

54. Выводы A и B схемы, изображённой на рисунке 41, подключены к батарейке с напряжением $U_0 = 4,5$ В. Сопротивление $r = 90$ Ом. Определите: сопротивление схемы между A и B , ток через батарею. Что показывают амперметры?

55. Определите сопротивление R_{AB} схемы, изображенной на рис. 42, при замкнутом и разомкнутом ключе K . Считайте r известным.

56. Определите показания амперметра при замкнутом и разомкнутом ключе K в схеме на рис. 43, если известно, что $(U_0/r) = 20$ мА.

57. Что показывают амперметры в схеме на рис. 44, если $U_0 = 4,5$ В, а сопротивление $R = 150$ Ом?

58. Найдите показания амперметра в цепи на рисунке 45, если напряжение батарейки $U_0 = 9$ В, а сопротивление $r = 450$ Ом.

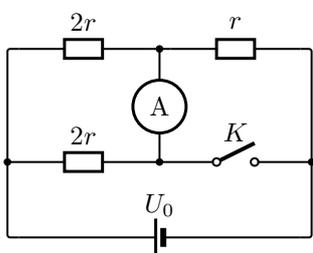


Рис. 43

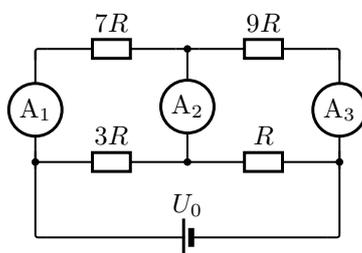


Рис. 44

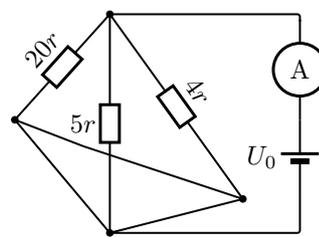


Рис. 45

Основное задание

59. Выводы A и B схемы, изображенной на рис. 46, подключены к батарее с напряжением $U_0 = 6,6$ В. Найдите ток через батарею. Определите показания амперметров. Сопротивление $R = 1,1$ кОм.

60. Что показывает амперметр в схеме на рис. 47, если к выводам A и B подключена батарея с $U_0 = 3$ В? $R = 100$ Ом. Найдите ток через батарею.

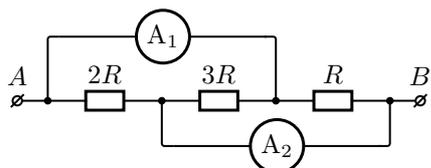


Рис. 46

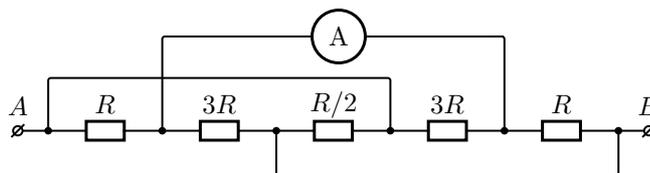


Рис. 47

61. Что показывает A_2 в схеме на рис. 48, если показания A_1 : $I_1 = 50$ мА?

62. В проволочной сетке на рисунке 49 проводники, выделенные толстыми линиями, имеют пренебрежимо малое сопротивление. Сопротивление любого другого проводника, соединяющего любые два соседних узла, равно R . Определите сопротивление между точками: A и C , A и B .

63. Рисунок 50. Условие и вопросы такие же, как в предыдущей задаче.

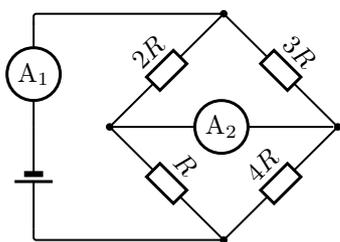


Рис. 48

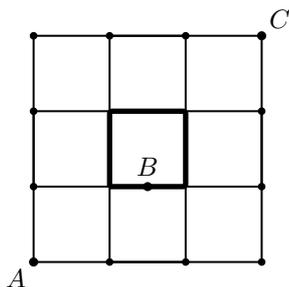


Рис. 49

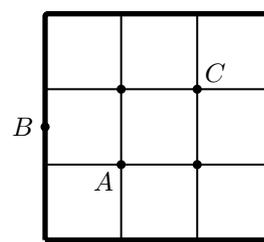


Рис. 50

64. В схеме, показанной на рисунке 51, $R_1 = 1$ кОм, $R_2 = 2$ кОм, $R = 30$ Ом. На выводы подано напряжение $U_0 = 9$ В. Определите показания амперметров. В точке пересечения проводников контакта нет!

65. В схеме на рис. 52 сопротивления: $R = 5$ Ом, $r_1 = 150$ Ом. Результат измерений тока амперметрами: $I_1 = 300,0 \pm 1,0$ мА, $I_2 = 0,0 \pm 1,0$ мА. Определите границы диапазона (r_{min} и r_{max}) возможных значений r : $r_{min} < r < r_{max}$.

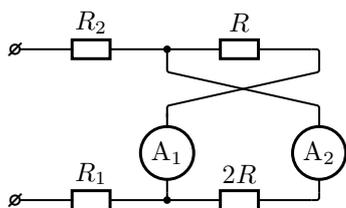


Рис. 51

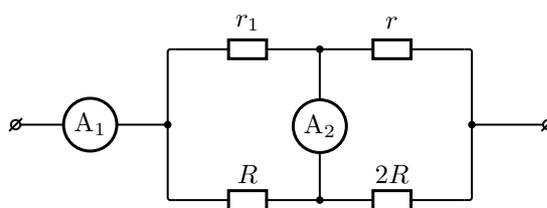


Рис. 52

Дополнительные задачи

- 💡 **66.** (Рег.этап, 2004, 9-10 кл., мод.) В схеме на рис. 53, $U_0 = 30$ В, сопротивление $r = 500$ Ом, вольтметры — идеальные. Определите показания приборов.

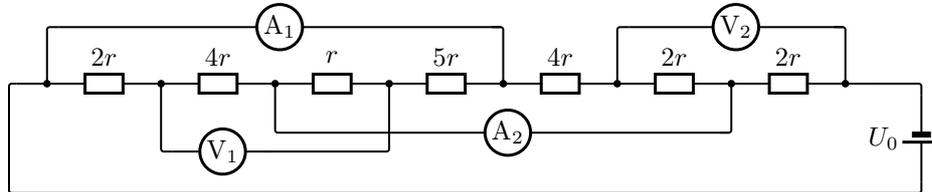


Рис. 53

- 💣 **67.** (Финал, 2001, 9 кл.) В цепи на рис. 54 сопротивление $R = 1$ кОм. Напряжение идеального источника питания $U_0 = 53,2$ В. Укажите, в каком из резисторов сила тока минимальна. Найдите эту силу тока. В каком из резисторов сила тока максимальна? Найдите её.

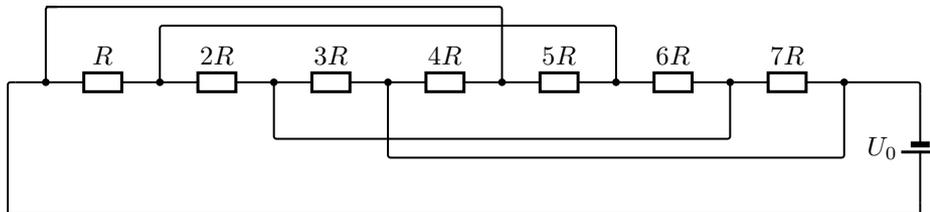


Рис. 54

- 💣 **68.** (МосГор, 2018, 9 кл.) В цепи, схема которой изображена на рисунке 55, $R = 3$ Ом. Напряжение между полюсами идеального источника 6 В. В центре шестиугольника контакта между проводами нет! Найдите показания идеальных амперметров.

- 💡 **69.** (Рег.этап, 2008, 9 кл.) В электрической цепи (рис. 56) сила тока, текущего через амперметр A_0 , равна I_0 . Сопротивление всех резисторов одинаково и равно R . Вычислите силу тока I_1 , текущего через амперметр A_1 . Подвижные контакты переменных резисторов установлены на середину так, что сопротивление от них до соответствующих выводов резистора равно $R/2$.

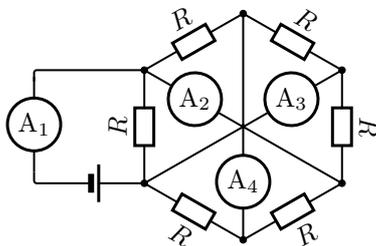


Рис. 55

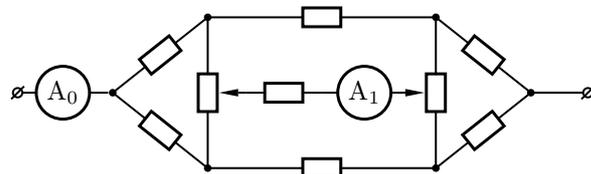


Рис. 56

6 Электроизмерительные приборы

Во всех задачах, если специально не оговаривается обратное: вольтметры и амперметры имеют конечное сопротивление; все батарейки идеальные.

Вопросы и тренировочные задачи

70. Амперметр с собственным сопротивлением $R_A = 3 \text{ Ом}$ подключают последовательно с резистором сопротивлением R_1 к батарейке с напряжением $U_0 = 4,5 \text{ В}$. Что показывает амперметр, если $R_1 = 150 \text{ Ом}$; $R_1 = 15 \text{ Ом}$; $R_1 = 1,5 \text{ Ом}$? В каком случае можно считать наш амперметр идеальным?

71. Два резистора с сопротивлением R_1 соединены последовательно и подключены к батарейке с напряжением $U_0 = 9 \text{ В}$. Параллельно одному из резисторов подключают вольтметр с собственным сопротивлением $R_V = 6 \text{ кОм}$. Определите показания вольтметра, если: $R_1 = 60 \text{ Ом}$, $R_1 = 600 \text{ Ом}$, $R_1 = 6 \text{ кОм}$. В каком случае можно считать этот вольтметр идеальным?

72. В цепи, изображённой на рис. 57, сопротивление вольтметра $R_V = 10 \text{ кОм}$, сопротивление амперметра $R_A = 2 \text{ Ом}$. При изменении сопротивления реостата изменяются ток I , регистрируемый амперметром, и напряжение U на вольтметре. Оказалось, что при $I_1 = 5 \text{ мА}$, показания вольтметра $U_1 = 0,5 \text{ В}$. Можно ли считать вольтметр идеальным при данных условиях? Определите, что показывает вольтметр при токе $I_2 = 50 \text{ мА}$. Изобразите график зависимости тока I от напряжения U при значениях напряжения от 1 В до 4 В. Между прочим, этот график называется *вольт-амперной характеристикой* (или ВАХ) резистора R .

73. В цепи, изображённой на рис. 58, сопротивление вольтметра $R_V = 10 \text{ кОм}$, сопротивление амперметра $R_A = 1 \text{ Ом}$. При изменении сопротивления реостата изменяются ток I через амперметр, и напряжение U на вольтметре. При токе $I_1 = 15 \text{ мА}$ вольтметр показал $U_1 = 3 \text{ В}$, а при токе $I_2 = 30 \text{ мА}$, $U_2 = 1,5 \text{ В}$. Что покажет вольтметр, если ток через амперметр будет близок к нулю? Изобразите график зависимости тока I от напряжения U при значениях напряжения от 0,5 В до 4 В. Как вы думаете, чему равны R и U_0 ?

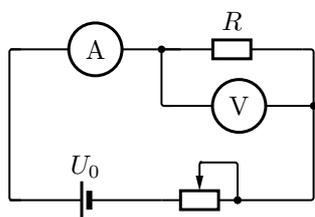


Рис. 57

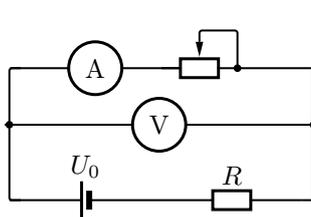


Рис. 58

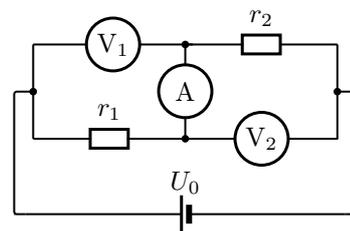


Рис. 59

74. В цепи, изображённой на рисунке 59, вольтметры можно считать идеальными, сопротивления: $r_1 = 20 \text{ Ом}$, $r_2 = 30 \text{ Ом}$, напряжение $U_0 = 6 \text{ В}$. Определите показания приборов, если: а) амперметр идеальный; б) сопротивление амперметра равно 10 Ом.

75. а) Для того, чтобы амперметром, рассчитанным на маленький максималь-

ный ток $I_0 = 50$ мА, можно было измерять большие токи (например, 1 А), к нему присоединяют добавочное сопротивление — шунт. Как его присоединяют: последовательно или параллельно? Во сколько раз увеличится предел измерения амперметра, если собственное сопротивление амперметра R_A , а сопротивление шунта R ?

б) Как нужно подсоединить шунт сопротивлением R к вольтметру с собственным сопротивлением R_V ? Во сколько раз увеличится предел измерения?

76. В цепи на рисунке 60 сопротивление одинаковых вольтметров равно R_V , $U_0 = 4,5$ В, сопротивление реостата, когда его скользящий контакт сдвинут к одному из концов R_0 , при этом: $R_V \gg R_0 \gg r$. Определите показания вольтметров, если контакт реостата: сдвинут в крайнее правое положение; сдвинут в крайнее левое положение; располагается посередине. Постройте график зависимости напряжения на первом вольтметре U_1 от напряжения на втором U_2 .

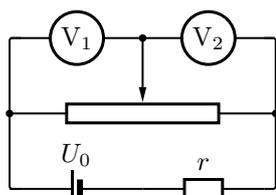


Рис. 60

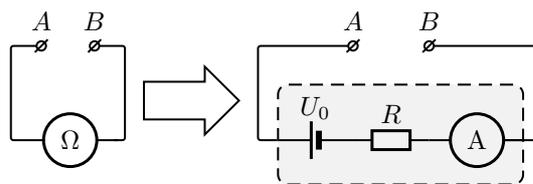


Рис. 61

78. Для определения сопротивления резистора R можно собрать схемы, представленные на рис. 62. Если приборы считать идеальными, то значение сопротивления, определяемое по показаниям вольтметра и амперметра в левой схеме: $R_1 = U_1/I_1$, будет таким же, как в правой: $R_2 = U_2/I_2$, и будет равно сопротивлению резистора: $R = R_1 = R_2$. Поскольку приборы имеют конечное сопротивление: $R_1 \neq R_2 \neq R$. Определите R_1 и R_2 для разных значений R . На сколько процентов в каждом случае R_1 и R_2 отличаются от R ? R равно: 4 Ом; 16 Ом; 400 Ом; 1,6 кОм. Другие параметры схем: $U_0 = 4$ В, $r = 1$ Ом, $R_A = 4$ Ом, $R_V = 1,6$ кОм.

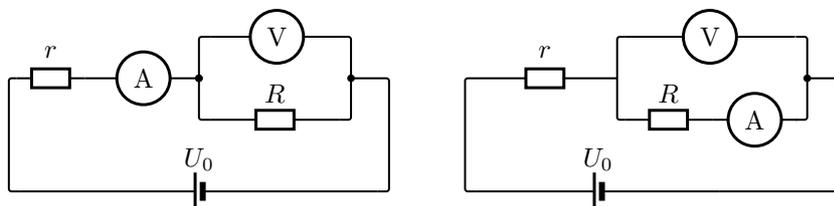


Рис. 62

Основное задание

79. В цепи, схема которой представлена на рис. 63, $R = 100 \text{ Ом}$, $r = 150 \text{ Ом}$, $U_0 = 9 \text{ В}$. Что показывает идеальный амперметр, если: $n = 1$; $n = 2$; $n = 1000$?

80. Что показывают приборы в цепи, схема которой изображена на рис. 64, если $r = 100 \text{ Ом}$, $U_0 = 3,5 \text{ В}$? Сопротивление вольтметра $R_V = 10 \text{ кОм}$, сопротивление одинаковых амперметров $R_A = 1 \text{ Ом}$.

81. В схеме на рис. 65 приборы идеальные. Вольтметр показывает напряжение $U_V = 1,6 \text{ В}$, амперметр A_1 регистрирует ток $I_1 = 6 \text{ мА}$. Определите напряжение источника U_0 и величину сопротивления R . Что показывает второй амперметр?

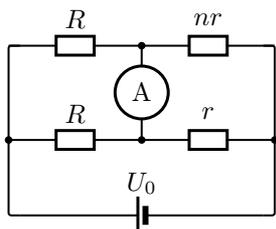


Рис. 63

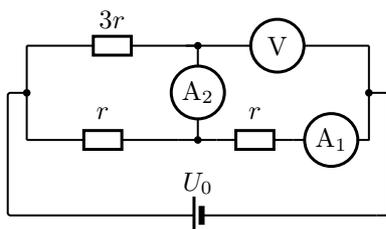


Рис. 64

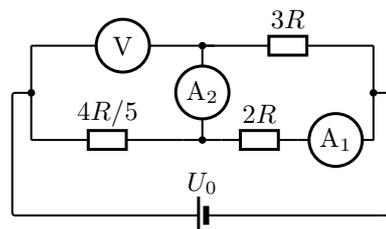


Рис. 65

82. Определите показания вольтметра в схеме, представленной на рис. 66. Сопротивление прибора значительно больше R . Напряжение на выводах батарейки $U_0 = 4,2 \text{ В}$. Как изменятся показания вольтметра, если батарейку и вольтметр поменять местами?

83. Два вольтметра в схеме на рис. 67 имеют одинаковое сопротивление, а третий — вдвое большее, напряжение на выводах батарейки $U_0 = 5 \text{ В}$. Определите показания приборов. Рассмотрите все возможные случаи.

84. Двадцать одинаковых резисторов соединены последовательно, получившаяся цепочка подключена к батарейке с напряжением $U_0 = 5,5 \text{ В}$. Вольтметр подключают параллельно 10 резисторам, он показывает $U_{10} = 2,2 \text{ В}$. Какое напряжение U_1 покажет вольтметр, если его подключить параллельно одному резистору? А если параллельно 19 резисторам?

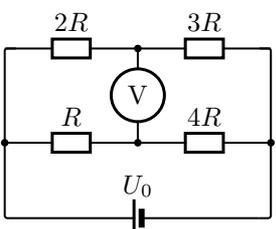


Рис. 66

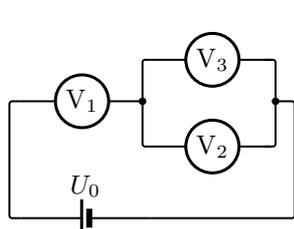


Рис. 67

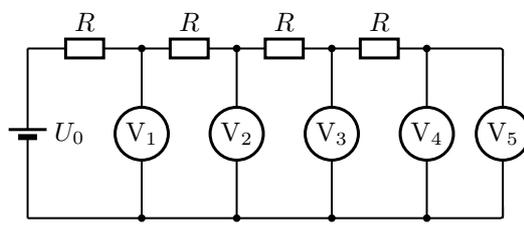


Рис. 68

85. В цепи на рис. 68 все вольтметры одинаковые. У вольтметров с первого по четвёртый показания соседних отличаются в два раза. Определите U_5 , если $U_0 = 8 \text{ В}$.

86. Выводы омметра из задачи 77 (схема на рис. 61), соединяют накоротко, при

этом стрелка амперметра отклоняется до последнего деления шкалы, насчитывающей $N = 50$ делений. После присоединения к выводам омметра резистора с сопротивлением $R = 100$ Ом стрелка отклонилась до середины шкалы. Чему равно сопротивление резистора, при подсоединении которого, стрелка отклоняется на 10 делений?

87. (Кóзел) У вас есть прибор с ценой деления $i_0 = 10$ мкА и много сопротивлений различных номиналов. Шкала прибора имеет $n = 100$ делений, собственное сопротивление прибора $R = 50$ Ом. Как из этого прибора сделать вольтметр с пределом измерения $U_0 = 200$ В или миллиамперметр с пределом измерения силы тока $I_0 = 800$ мА?

88. Абсолютная погрешность измерения тока i амперметром, рассчитанным на токи до $i_{max} = 50$ мА, имеет оценку $\Delta i = 1$ мА. Имеется много таких амперметров. Как и сколько амперметров нужно соединить, чтобы можно было измерять с наименьшей относительной погрешностью ($\Delta I/I$) токи около: 1 А, 120 мА? Чему будет равна относительная погрешность измерения?

89. (Зильберман) К идеальной батарее подключены последовательно соединённые вольтметр и амперметр. Вольтметр показывает 6 В, амперметр — 1 мА. Параллельно амперметру подключают ещё один такой же амперметр, после этого показания первого амперметра уменьшаются до 0,51 мА. Считая показания приборов точными, найдите по этим данным сопротивления приборов.

90. (Кóзел) В схему (рис. 69) включены два микроамперметра и два одинаковых вольтметра. Показания микроамперметров $I_1 = 100$ мкА и $I_2 = 99$ мкА, показание первого вольтметра $U_1 = 10$ В. Определите показание второго вольтметра.

91. Выводы A и B цепи, изображённой на рисунке 70, подключены к источнику тока. Показания приборов: $I_2 = 60$ мА, $I_1 = 50$ мА, $U_2 = 10$ В, $U_1 = 9,9$ В. Определите собственное сопротивление вольтметра и амперметра, а также сопротивление резистора R .

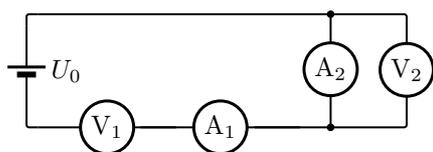


Рис. 69

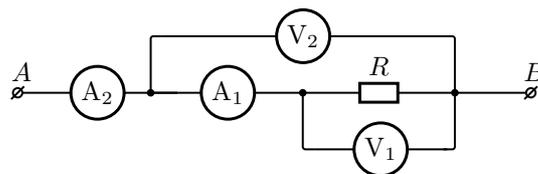


Рис. 70

92. Найдите R , для которого отношение значений R_1 и R_2 , полученных при измерениях в цепях из задачи 78, минимально. Для этого R вычислите отношение: $(R_2 - R_1)/(R_2 + R_1)$. Как вы думаете, каков физический смысл полученного выражения?

Примечание: если $x > 0$, $a > 0$ и $b > 0$, то минимум выражения $(x/a) + (b/x)$ достигается при $x = \sqrt{ab}$.

Дополнительные задачи

- 93.** (Кóзел) Цепь собрана из трех одинаковых резисторов и трех одинаковых вольтметров (схема на рисунке 71). Показания первого и третьего вольтметров $U_1 = 10$ В, $U_3 = 8$ В соответственно. Найдите показания U_2 второго вольтметра.
- 94.** (Рег.этап, 2001, 9 кл.) Найдите показания одинаковых вольтметров (см. рис. 72). Сопротивления вольтметров гораздо больше сопротивлений резисторов $R = 10$ Ом. Напряжение на входе между выводами A и B : $U_{AB} = 4,5$ В.
- 95.** (Рег.этап, 2007, 10 кл.) К клеммам приведенной на рисунке 73 электрической цепи приложено напряжение $U = 9$ В. Если к вольтметру подключить параллельно резистор R , то показания вольтметра уменьшатся в 2 раза, а показания, амперметра увеличатся в 2 раза. Какое напряжение показывал вольтметр до и после подключения резистора?

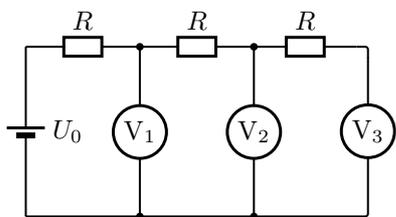


Рис. 71

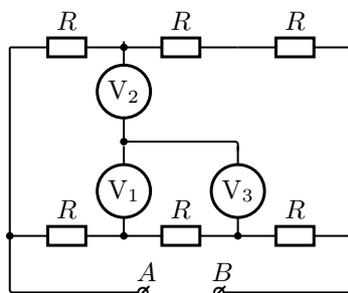


Рис. 72

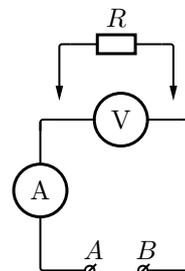


Рис. 73

- 96.** (МосГор, 1993, 10 кл.) Многопредельный амперметр представляет собой миллиамперметр с набором сменных шунтов. Им измеряют ток в некоторой цепи. На пределе «1 мА» прибор показал $I_1 = 1$ мА; когда его переключили на предел «3 мА» — $I_2 = 1,5$ мА. Каков истинный ток I_0 в цепи без амперметра?
- 97.** (Максвелл, 2017, 8 кл.) Соединённые треугольником приборы (рис.74, слева) показывают значения: $R_1 = 1100$ Ом, $U_1 = 1,0$ В, $I_1 = 1,0$ мА. Если их соединить звездой (рис.74, справа), то амперметр покажет $I_2 = 2,0$ мА. Что покажут вольтметр и омметр? Определите внутреннее сопротивление r и напряжение U источника омметра. Считайте, что омметр устроен так же, как в задаче 76, ток через амперметр омметра автоматически пересчитывается в сопротивление, измеряемое омметром.

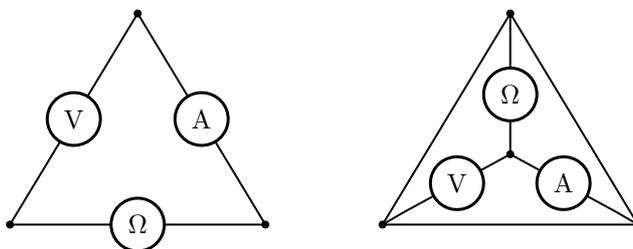


Рис. 74

7 Работа и мощность тока. ЭДС.

- Если в формулировке условия задачи употребляется слово «сеть» или словосочетание «включили в сеть», то подразумевается подключение к электрической сети, которую можно представлять себе, как идеальный источник питания, поддерживающий постоянное напряжение на выводах.
- При увеличении температуры на величину около 100°C изменением плотности, удельного сопротивления и удельной теплоёмкости пренебрегаем.

Таблица 1: Плотность (ρ), удельное сопротивление (σ), удельная теплоёмкость (c) и температура плавления ($t_{\text{пл}}$) некоторых металлов и сплавов при $t_0 = 20^\circ\text{C}$.

	Медь	Алюминий	Сталь	Нихром
$\rho, 10^3 \text{ кг/м}^3$	8,9	2,7	7,8	8,3
$\sigma, 10^{-8} \text{ Ом} \cdot \text{м}$	1,75	2,8	12,0	120,0
$c, \text{ Дж}/(\text{кг}^\circ\text{C})$	380,0	900,0	460,0	460,0
$t_{\text{пл}}, ^\circ\text{C}$	1100	660	960	1200

Вопросы и тренировочные задачи

98. Средняя мощность электрического чайника, электроплиты и утюга составляет: 2 кВт, 3, 5 кВт и 1 кВт соответственно. Какой ток течёт в проводах, соединяющих каждый из электроприборов с сетью 220 В?

99. В силовом щитке квартиры установлен автомат, отключающий линию розеток электросети в комнатах при токе 10 А. Хозяева квартиры приобрели игровой компьютер с блоком питания на 750 Вт, LED-телевизор с максимальной потребляемой мощностью 350 Вт, лазерное МФУ (принтер, сканер), потребляющее 600 Вт и утюг, рассчитанный на 1 кВт. Все эти устройства планируется включать в розетки, не считая светильников и зарядных устройств. Электрик сказал, что проводка позволяет выдерживать токи до 20 А, поэтому желательно заменить автомат на более мощный. Почему электрик дал хозяевам квартиры такую рекомендацию?

100. Как изменится мощность утюга, подключаемого к бытовой электрической сети, если у него укоротить спираль нагревательного элемента?

101. Имеется два нагревательных элемента мощностью 300 Вт и 600 Вт.

- У какого нагревательного элемента сопротивление больше и во сколько раз?
- Нагреватели включают в электрическую сеть, соединив последовательно. Какая мощность выделяется?
- Нагреватели соединяют параллельно. Определите выделяющуюся мощность.

102. К батарее с ЭДС \mathcal{E} и внутренним сопротивлением r подключают резистор сопротивлением R .

- Найдите ток через батарею и определите работу ЭДС $A_{\mathcal{E}}$ за время τ .
- Найдите количество теплоты Q_r , выделившееся на внутреннем сопротивлении за время τ , а также отношение $Q_R/A_{\mathcal{E}}$, где Q_R — количество теплоты, выделившееся на резисторе за время τ .

103. К аккумуляторной батарее с ЭДС $\mathcal{E} = 10$ В и внутренним сопротивлением $r = 1$ Ом подключают переменный резистор, сопротивление R которого может принимать значения от нуля до 20 Ом. Изменяя сопротивление R , можно регулировать ток I в цепи. При каком R ток I равен 10 А? А при каком 1 А? Для целых значений I от 1 А до 10 А определите тепловую мощность P , выделяющуюся на резисторе. Постройте график зависимости $P(I)$. При каком значении R , судя по графику, на резисторе выделяется наибольшая мощность?

104. Миниатюрную лампу накаливания мощностью 2,4 Вт, рассчитанную на напряжение 4,8 В, подключают к батарейке с ЭДС $\mathcal{E} = 4,8$ В и внутренним сопротивлением $r = 2,4$ Ом при помощи медных проводов пренебрежимо малого сопротивления. Определите мощность ЭДС и мощность тепловых потерь на внутреннем сопротивлении.

105. При монтаже электрической сети в помещениях диаметр кабеля выбирают в зависимости от предполагаемого максимального тока на нагрузке. Например, для медного кабеля диаметром $d = 2,5$ мм предельный ток, при котором смонтированная сеть ещё будет оставаться безопасной, составляет 30 А при монтаже открытым способом и 21 А при монтаже в пластиковой трубе. Для алюминиевого провода того же диаметра эти значения составляют 24 А и 16 А соответственно. Почему алюминиевый провод обеспечивает меньшие предельные токи? Почему при монтаже в трубе предельный ток ниже, чем при монтаже открытым способом?

106. Измеренное омметром сопротивление миниатюрной лампочки (отключенной от источника) составляет $R_0 = 2,1$ Ом. Лампочку подключают к батарейке, спираль лампочки слабо светится, при этом измерения напряжения на лампочке и тока через неё дают значения: $U = 2,2$ В и $I = 0,2$ А. Как вы думаете, почему $U \neq IR_0$? Какая мощность выделяется на лампочке? Найдите мощность и сопротивление лампочки в расчётном режиме, если на цоколе написано 6 В; 0,3 А.

107. Два нагревателя включены параллельно в сеть с напряжением 220 В. Первый, имеющий сопротивление 40 Ом, помещен в сосуд с 1 кг льда при 0°C . Другой, с сопротивлением 20 Ом, помещен в сосуд с 2 кг воды при 10°C . Где раньше содержимое закипит и через какое время? Удельная теплота плавления льда: $\lambda = 3,3 \cdot 10^5$ Дж/кг, удельная теплоёмкость воды: $c = 4200$ Дж/(кг $^\circ\text{C}$).

Основное задание

108. Определите время, за которое стальная проволока сечением $S = 0,1 \text{ мм}^2$ и длиной $L = 1 \text{ м}$ нагреется на $\Delta t = 1^\circ\text{C}$, если её подключить к аккумулятору с $\mathcal{E} = 9 \text{ В}$ и внутренним сопротивлением $r = 1 \text{ Ом}$. Теплообменом пренебречь.



109. (Савченко) Батарейка с $\mathcal{E} = 4 \text{ В}$ и $r = 1 \text{ Ом}$ входит в состав неизвестной цепи. К полюсам батарейки подключен вольтметр. Вольтметр показывает $3,9 \text{ В}$. Какое количество теплоты выделяется на внутреннем сопротивлении в единицу времени? А если вольтметр показывает 6 В ?

110. Три одинаковых по размерам проволочки: из меди, алюминия и нихрома соединили последовательно и подключили к источнику постоянного напряжения. Какая из проволочек быстрее всего нагреется до 100°C ? Начальная температура равна 20°C . Теплообменом с окружающей средой пренебречь.

111. В условиях предыдущей задачи проволочки соединили не последовательно, а параллельно и подключили к тому же источнику. Какая проволочка быстрее нагреется до 100°C в этом случае?

112. Электрический чайник имеет две обмотки. При включении одной из них чайник вскипает через время $t_1 = 10 \text{ мин}$, при включении другой — через время $t_2 = 15 \text{ мин}$. Через какое время чайник вскипит, если эти обмотки включить вместе: а) параллельно; б) последовательно.

113. (Кóзел, мод.) Нагреватель кипятивника состоит из трёх секций, каждая из которых имеет сопротивление $R_0 = 3 \text{ Ом}$. Нагреватель питают от аккумуляторной батареи с ЭДС $\mathcal{E} = 12 \text{ В}$ и внутренним сопротивлением $r = 2 \text{ Ом}$. Как нужно соединить элементы нагревателя, чтобы вода в кипятивнике нагревалась быстрее? Какова при этом мощность, расходуемая аккумулятором?

114. К батарейке с внутренним сопротивлением r , присоединяют два одинаковых резистора, соединённые один раз последовательно, а другой — параллельно. Оказалось, что тепловая мощность на одном резисторе в обоих опытах одна и та же. Найдите сопротивление одного резистора.



115. К батарейке с ЭДС \mathcal{E} и внутренним сопротивлением r подключена нагрузка, которая характеризуется сопротивлением R . При каком значении R на нагрузке будет выделяться наибольшая мощность?



116. При подключении к источнику резистора сопротивлением $R = 5 \text{ Ом}$ через него идет ток $I = 1 \text{ А}$, а при коротком замыкании через источник течет ток $I_0 = 6 \text{ А}$. Какую наибольшую мощность можно получить от этого источника?

117. (Савченко) От источника напряжения 10 кВ требуется передать на расстояние 5 км мощность 500 кВт ; допустимая потеря напряжения в проводах 1% . Каково минимальное сечение медного провода? Во сколько раз следует повысить напряжение источника, чтобы снизить потери мощности в 100 раз в той же линии при передаче той же мощности?

Дополнительные задачи

-  **118.** Нихромовая проволока квадратного сечения, подключенная к источнику постоянного напряжения, нагревается до температуры T_1 при температуре окружающей среды T_0 . До какой температуры нагреется проволока такой же длины, но вдвое большей толщины, подключенная к тому же источнику?
Теплоотвод с единицы площади нагретой поверхности в единицу времени пропорционален разности температур нагретой поверхности T и окружающей среды T_0 :

$$\frac{Q}{S\Delta t} = \alpha(T - T_0).$$

α зависит только от тепловых свойств окружающей среды.

-  **119.** В условиях предыдущей задачи проволоки подключают не к одному источнику, а к разным, но так, что через них в обоих случаях течет одинаковый ток. До какой температуры нагреется проволочка большей толщины?

-  **120.** (*Адыгья*) Мальчик Во из центральной Африки приобрел замечательную электроплитку, сопротивление которой не зависело от температуры. Сначала Во включил эту плитку в сеть с напряжением $U_1 = 55$ В, она нагрелась до температуры $t_1 = 55^\circ\text{C}$. Затем он включил ее в сеть с напряжением $U_2 = 110$ В, и она нагрелась до температуры $t_2 = 110^\circ\text{C}$. До какой температуры нагреется плитка, если ее включить в сеть с напряжением $U_3 = 220$ В?

Примечание. Поток тепла от плитки во внешнюю среду пропорционален разности температур между плиткой и внешней средой. Температура внешней среды постоянна.

-  **121.** (*Рег.этан, 2006, 9 кл.*) Дачный домик отапливается с помощью электрических батарей. При температуре батарей $t_{\text{Б}}^{(1)} = 50^\circ\text{C}$ и температуре наружного воздуха $t_1 = -10^\circ\text{C}$ в домике устанавливается температура $t = 20^\circ\text{C}$. Во сколько раз нужно увеличить силу тока в батареях, чтобы в комнате поддерживалась прежняя температура в холодные дни при наружной температуре $t_2 = -25^\circ\text{C}$? Какова при этом будет температура батарей $t_{\text{Б}}^{(2)}$? Можно считать, что электрическое сопротивление батарей не зависит от температуры.

-  **122.** Зависимость сопротивления резистора от температуры дается формулой:

$$R(t) = R_0(1 + \alpha t),$$

t — температура в $^\circ\text{C}$, α — неизвестный коэффициент. Мощность теплоотдачи с поверхности резистора прямо пропорциональна разности температур резистора и окружающей среды: $P(t) = \beta(t - t_0)$. В дальнейшем считаем: $t_0 = 0^\circ\text{C}$.

Оказывается, что при токах меньше 1 мА сопротивление резистора равно 10 Ом. Когда величина тока, протекающего через резистор, приближается к $I_0 = 3$ А, резистор быстро разогревается и плавится. Какое напряжение будет на резисторе, если через него протекает ток $I_0/2$?

8 Вольт-амперные характеристики.

Вопросы и тренировочные задачи

123. На рисунке 75 изображены ВАХ двух резисторов. Определите их сопротивления: R_1 и R_2 . Постройте вольт-амперную характеристику: параллельно соединённых резисторов R_1 и R_2 ; последовательно соединённых резисторов.

124. На рисунке 76 вы видите вольт-амперные характеристики нескольких нелинейных элементов (линии 1-5), а также общую касательную к графикам этих характеристик (линия 0), проведённую в нуле. У какого элемента дифференциальное сопротивление при $U = 4$ В наибольшее? У какого наименьшее? В какой области можно считать все элементы подобными обычному резистору с неизменным сопротивлением? Чему равно это сопротивление?

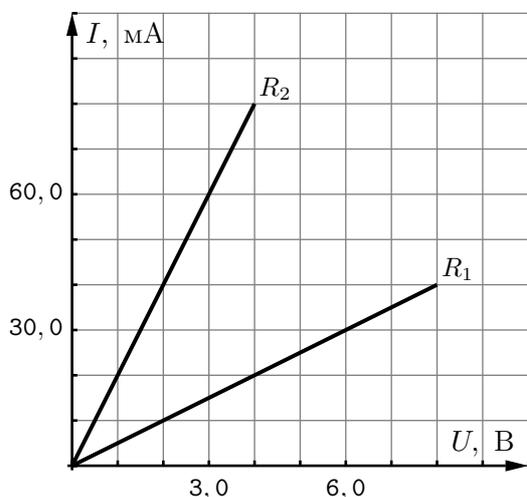


Рис. 75

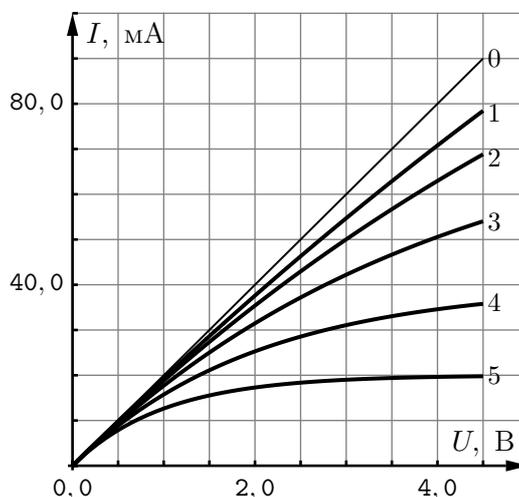


Рис. 76

125. Элементы 5 и 3, описанные в задаче 124, соединяют параллельно и подключают к идеальному источнику с регулируемым напряжением. Определите, используя графики на рисунке 76, ток через источник при напряжении: $U_1 = 4$ В; $U_2 = 2, 5$ В.

126. Элементы 4 и 1 из задачи 124 соединили последовательно. Чему равно напряжение на выводах получившегося соединения, если ток через элементы равен 30 мА?

127. На рисунке 78 (на следующей странице) изображена ВАХ идеального источника ЭДС, соединённого с резистором. Положительным направлением тока считается направление от A к B (см. схему на рисунке 77).

а) Используя график вольт-амперной характеристики определите, какое напряжение покажет идеальный вольтметр подключенный к выводам A и B схемы. Это напряжение называют *напряжением холостого хода*. Найдите \mathcal{E} .

б) Какой ток потечёт через идеальный амперметр, подключенный к A и B ? Этот ток

называют *током короткого замыкания*. Найдите величину сопротивления R .

в) Запишите уравнение зависимости $I(U)$.

г) К выводам A и B подключен резистор с сопротивлением $R_1 = 50$ Ом. Изобразите его вольт-амперную характеристику. Какой ток течёт через резистор?

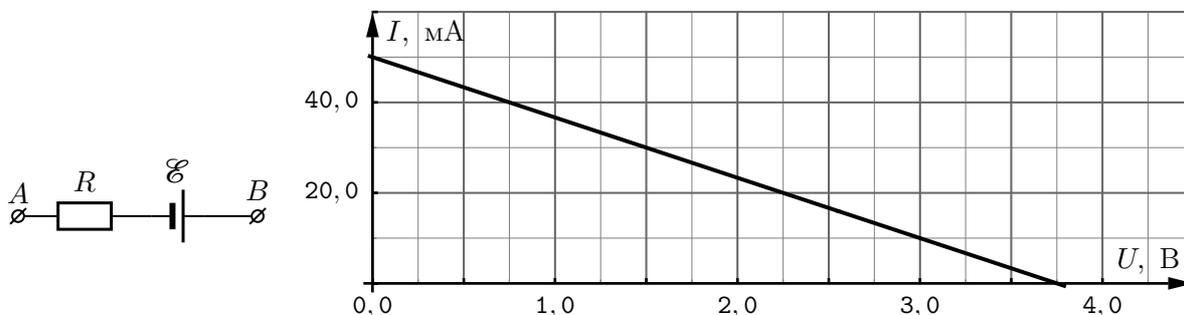


Рис. 77

Рис. 78

128. На рисунке 79 изображены три вольт-амперные характеристики: резистора (1), светодиода (2), стабилизатора тока (3). Каждый из этих элементов подключают последовательно с резистором сопротивлением $R_0 = 300$ Ом к идеальному источнику с ЭДС $\mathcal{E} = 9$ В.

а) Изобразите ВАХ источника с резистором R_0 на рисунке.

б) Через какой элемент при подключении к источнику с резистором потечёт наибольший ток?

в) На каком из элементов будет при таком подключении наибольшее напряжение?

г) Сопротивление R_0 увеличили в два раза. Ответьте на вопросы пунктов б) и в).

129. На рисунке 80 сплошной линией показана ВАХ стабилизатора тока. Пунктиром изображена идеализированная характеристика. Один из выводов стабилизатора подключают к выводу идеальной батарейки с напряжением $U_0 = 9$ В.

а) Изобразите ВАХ батарейки со стабилизатором. Используйте идеализированную характеристику стабилизатора.

б) При каком напряжении источник со стабилизатором выдают на нагрузку максимальную мощность?

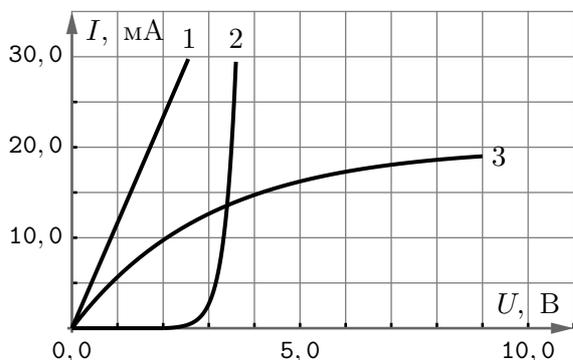


Рис. 79

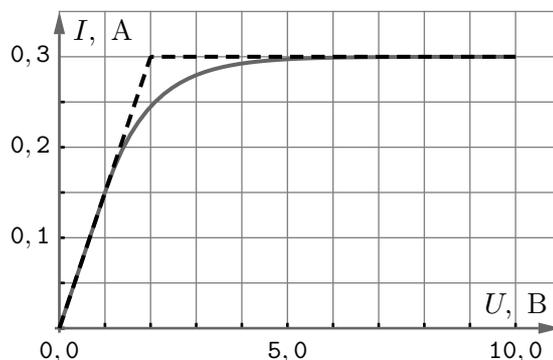


Рис. 80

130. На рис. 81 вы видите участок ВАХ диода. Обозначенное на рисунке направление тока принимается за положительное. При этом напряжение считается положительным, если: $\varphi_1 > \varphi_2$. При напряжении $U = -2,25$ В ток: $I = -1,25$ мА.

а) Сравните дифференциальные сопротивления диода при $U_1 = -2$ В и $U_2 = 0,375$ В.

б) Диод подключен к идеальному источнику с ЭДС $\mathcal{E} = 5$ В последовательно с резистором $R = 100$ Ом, при этом т.1 соединена с «+» источника. Определите ток через диод, сначала используя идеализированную ВАХ (изображена пунктиром), а затем используя реальную.

в) Те же вопросы, что и в б), но для случая, когда т.1 соединена с «-» источника.

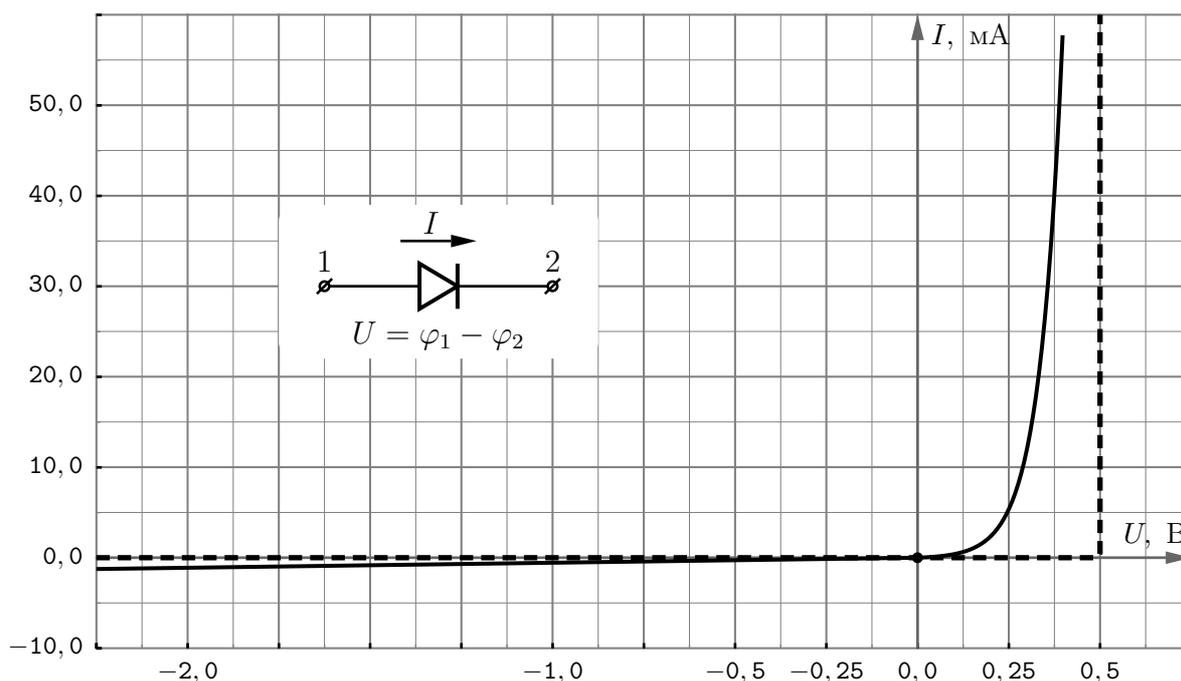


Рис. 81

131. Диод, вольт-амперная характеристика которого изображена на рисунке 81 пунктиром, открывается при напряжении $U_0 = 0,5$ В. Идеальным называется диод, открывающийся при нулевом напряжении. ВАХ идеального диода схематично изображена на рисунке 82. Определите ток через источник с ЭДС $\mathcal{E} = 4,5$ В в схемах на рисунках 83 и 84. $R = 150$ Ом. Внутренним сопротивлением пренебречь.

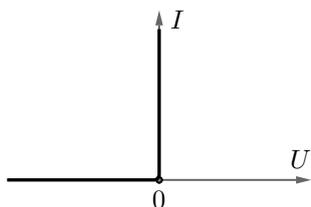


Рис. 82

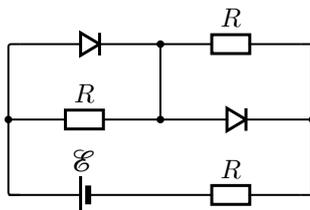


Рис. 83

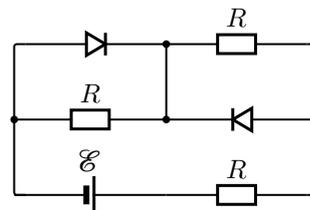


Рис. 84

Основное задание

132. На рисунке 85 вы видите идеализированную вольт-амперную характеристику диода, который открывается при напряжении $U_0 = 0,5$ В. Изобразите:

- а) вольт-амперную характеристику резистора сопротивлением $R = 100$ Ом;
- б) ВАХ последовательно соединённых резистора и диода;
- в) характеристику параллельно соединённых диода и резистора.

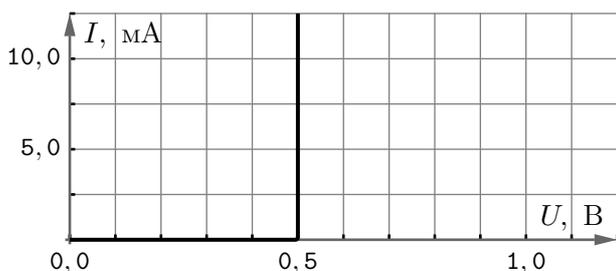


Рис. 85

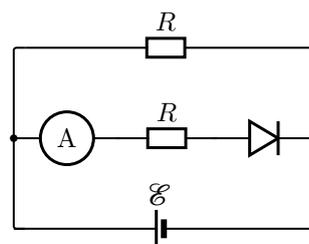


Рис. 86

133. Диод в цепи, показанной на рис. 86, открывается при напряжении $U_0 = 0,5$ В. Что показывает идеальный амперметр, если $\mathcal{E} = 1,5$ В, $R = 50$ Ом? Определите ток через батарейку. Внутренним сопротивлением источника пренебречь.



134. На рисунке 87 вы видите идеализированную вольт-амперную характеристику светодиода. В этой задаче будем считать, что светодиод работает в нормальном режиме, если значения тока через него и напряжения на нём попадают на участок характеристики, лежащий между точками *A* и *B* на рисунке. Три светодиода соединяют последовательно и подключают через токоограничивающий резистор к аккумулятору с ЭДС $\mathcal{E} = 12$ В и пренебрежимо малым внутренним сопротивлением, как показано на рисунке 88. Каким должно быть сопротивление резистора R , чтобы светодиоды работали в нормальном режиме? Укажите минимальное и максимальное значения.

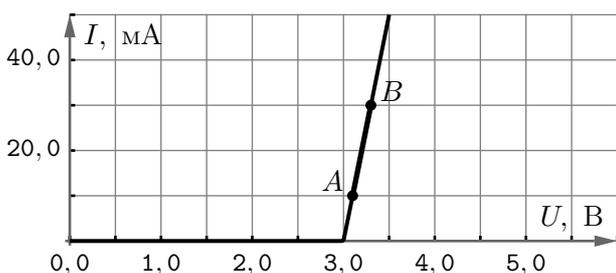


Рис. 87

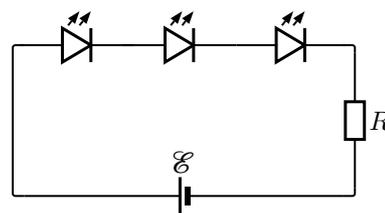


Рис. 88



135. Почему не рекомендуется подключать светодиоды напрямую к источнику питания без токоограничивающего резистора? Рассмотрите светодиод, характеристика которого изображена на рис. 87, и блок питания, рассчитанный на номинальное напряжение $U = 3,2$ В вне зависимости от нагрузки. Учтите, что напряжение на выходе блока питания может отличаться от номинального (например, вследствие ко-

лебаний напряжения в сети), но не более, чем на 5%. Считайте, что номинальный ток светодиода равен 20 мА, мощность светового потока, излучаемого светодиодом, пропорциональна протекающему через него току.

136. На рисунке 89 приведены вольт-амперные характеристики двух батареек с $\mathcal{E}_1 = 4,5$ В и $\mathcal{E}_2 = 3,0$ В. Постройте вольт-амперную характеристику участка цепи, состоящего из этих двух источников, соединенных:

- а) параллельно, как показано на рисунке 90 (1);
- б) последовательно, как на рисунке 90 (2).

Считайте в каждом случае положительным направление тока от А к В; положительному напряжению $U_{AB} > 0$ соответствует больший потенциал точки А: $\varphi_A > \varphi_B$.

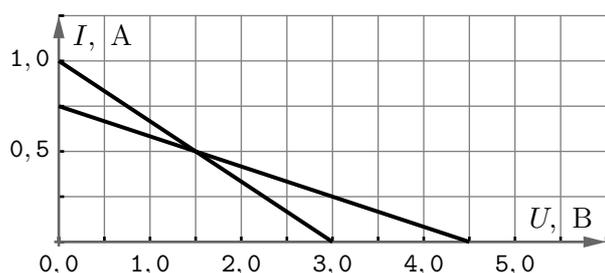


Рис. 89

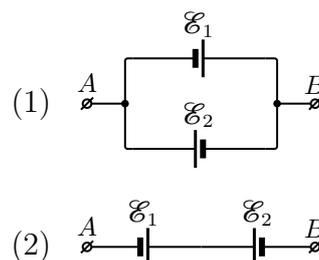


Рис. 90

137. (Кóзел, мод.) На рисунке 91 приведена вольт-амперная характеристика лампочки от карманного фонаря, включенной в схему, показанную на рисунке 92. ЭДС батареи $\mathcal{E} = 4$ В. Сопротивление резистора $r = 10$ Ом. Определите, используя график, силу тока в лампочке. Определите отношение сопротивлений частей реостата слева и справа от его движка, если идеальный вольтметр показывает нулевое напряжение.

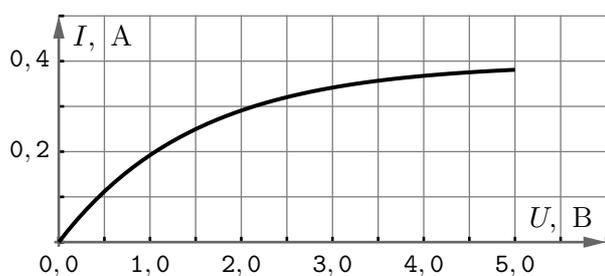


Рис. 91

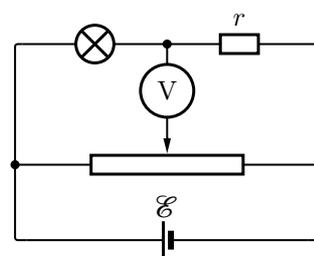


Рис. 92

138. Две одинаковые лампочки (ВАХ одной лампы показана на рисунке 91) соединены последовательно и подключены к батарее с ЭДС $\mathcal{E} = 3$ В и внутренним сопротивлением $r = 5$ Ом. Определите ток через батарейку и мощность, выделяющуюся на лампочках. Верно ли, что если лампочки подключить параллельно, а не последовательно, ток через батарейку увеличится меньше, чем в 3 раза, но больше, чем в 2?

Дополнительные задачи



139. (Физтех, 2002) На рисунке 93 изображена вольт-амперная характеристика двух соединённых параллельно элементов (ломаная 1), одним из которых является резистор с сопротивлением $R = 200$ Ом, а другим — неизвестный элемент Z . Используя заданную вольт-амперную характеристику, постройте вольт-амперную характеристику элемента Z_1 . Постройте вольт-амперную характеристику элемента Z_2 , используя ломаную 2 на рисунке 93, которая представляет собой вольт-амперную характеристику последовательно соединённых Z_2 и резистора $R_2 = 100$ Ом.

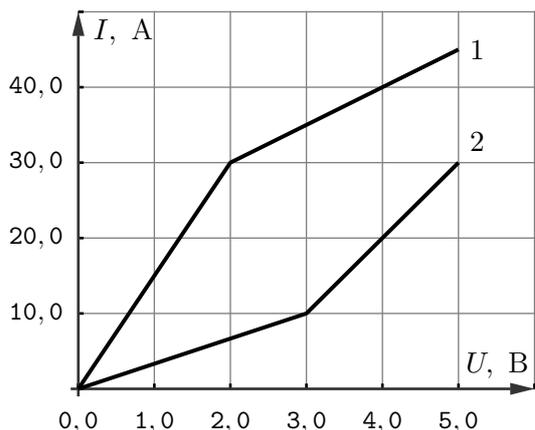


Рис. 93

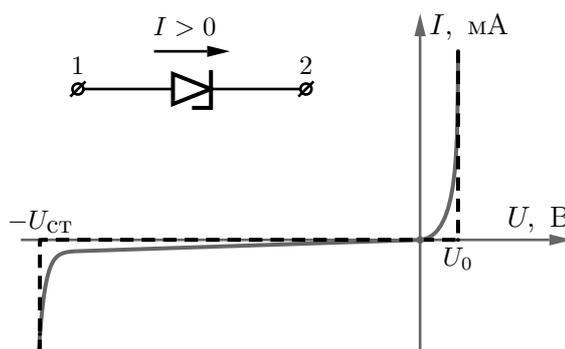


Рис. 94



140. Стабилитрон (диод Зенера) — полупроводниковый элемент, подобный диоду. Вольт-амперная характеристика стабилитрона показана на рисунке 94 сплошной линией. В идеализированном случае можно считать, что в прямом направлении (показано стрелкой) стабилитрон открывается при напряжении U_0 , а в обратном при напряжении стабилизации $U_{ст}$. Идеализированная ВАХ изображена пунктиром. У стабилитронов в цепи на рис. 95: $U_0 = 0$, $U_{ст} = 3$ В. Определите показания идеальных приборов. Известно, что ЭДС батареи: $\mathcal{E} = 9$ В, а сопротивление резисторов $R = 100$ Ом значительно больше внутреннего сопротивления батареи.

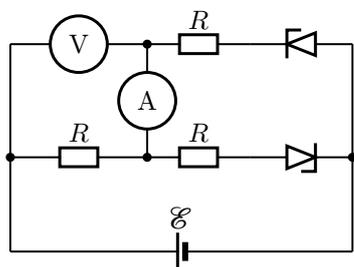


Рис. 95

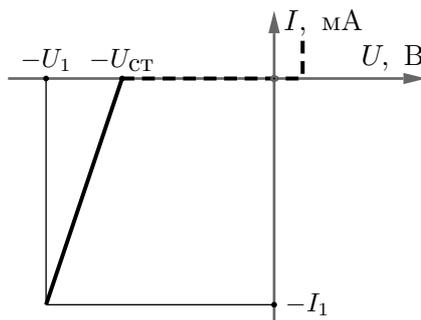


Рис. 96

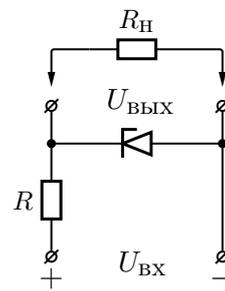


Рис. 97



141. На участке стабилизации ВАХ стабилитрона (см. з. 140, рис. 94) можно приближённо считать линейной, как показано на рис. 96, где участок от $-U_1$ до $-U_{ст}$

непропорционально расширен для наглядности. Пусть для некоторого стабилизатора: $U_{ст} = 9 \text{ В}$, $U_1 = 10 \text{ В}$, $I_1 = 25 \text{ мА}$. При токах превышающих I_1 стабилизатор выходит из строя.

Для стабилизации напряжения собирают схему, изображённую на рис. 97, где сопротивление $R = 1 \text{ кОм}$. Нарисуйте график зависимости напряжения на выходе схемы от напряжения на входе ($10 \text{ В} \leq U_{вх} \leq 25 \text{ В}$), считая сопротивление подключаемой нагрузки R_H бесконечно большим. При каком сопротивлении нагрузки схема будет работоспособна в диапазоне входных напряжений от 20 В до 40 В?



142. (Рег.этан, 2008, 9 кл.) Экспериментатор Глюк собрал электрическую цепь из одинаковых нелинейных элементов (лампочек), схема показана на рис. 98 (б). Вольт-амперная характеристика одной лампочки представлена на рис. 98 (а). Какой будет сила тока в цепи, если на нее подать напряжение: а) $U_0 = 0,15 \text{ В}$; б) $U_0 = 3 \text{ В}$?

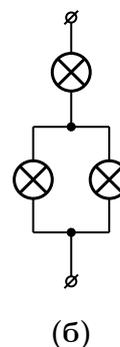
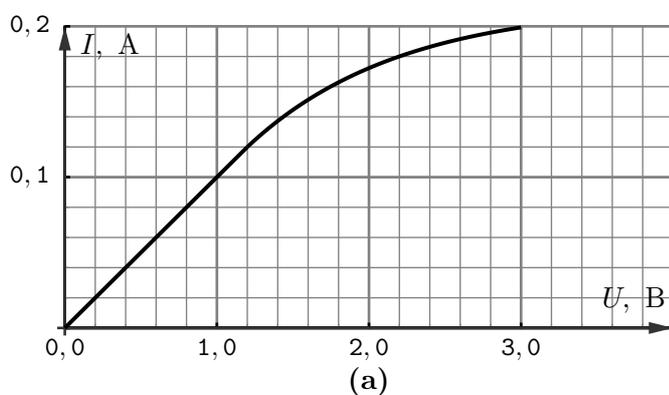


Рис. 98



143. Сопротивление лампы накаливания сильно зависит от температуры вольфрамовой спирали. В рабочем режиме, когда спираль разогрета до температуры более 2000°C , её сопротивление в n раз ($n \approx 10$), больше, чем в холодном состоянии, при комнатной температуре. Рассмотрим лампу мощностью 55 Вт, рассчитанную на напряжение 220 вольт, для которой $n = 10$. Попробуйте нарисовать примерную ВАХ этой лампы. 100 таких лампочек соединили последовательно и включили в розетку с напряжением 220 вольт. Чему равен ток в цепи?

9 Преобразование треугольник-звезда

144. Можно доказать, что электрическая цепь с тремя выводами, образованная тремя резисторами с сопротивлениями R_1, R_2, R_3 , соединенными «треугольником» (см. рисунок 99), эквивалентна соединению некоторых других сопротивлений R_A, R_B, R_C в форме «звезды». Будем считать две схемы эквивалентными, если сопротивление между любыми двумя выводами первой схемы равно сопротивлению между соответствующими выводами второй.

а) Вычислите сопротивления резисторов, образующих «звезду», эквивалентную «треугольнику» с сопротивлениями $R_1 = R_2 = R_3 = 3R$.

б) Разберите еще один частный случай: $R_1 = R_2 = R, R_3 = (1 + \alpha)R, \alpha \ll 1$.

в) Попробуйте найти сопротивления резисторов «звезды» в общем случае, для произвольных R_1, R_2, R_3 .

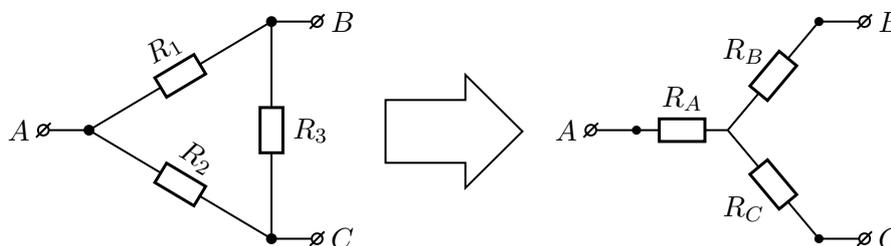


Рис. 99

145. Определите сопротивление между выводами схем на рисунке 100.

146. Все обозначенные на рисунке 101 величины известны. Определите сопротивление между различными вершинами пирамиды, если $\alpha \ll 1$.

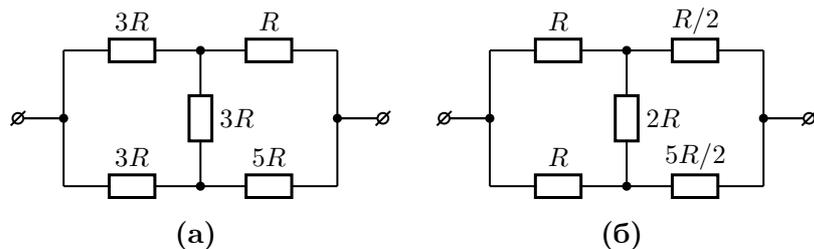


Рис. 100

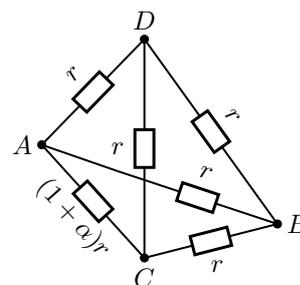


Рис. 101

147. Можно ли «квадрат» из одинаковых резисторов сопротивлением R заменить на четырехконечную «звезду» из одинаковых резисторов сопротивлением r ? Если да, то выразите r через R , если нет — объясните почему.

148. Как вы думаете, сколько необходимо резисторов R_1, R_2, \dots, R_N , чтобы составить цепь, эквивалентную звезде из четырёх различных резисторов? Как должны быть соединены резисторы R_1, R_2, \dots, R_N ? Чему равно N , если звезда состоит из 5 различных резисторов?

149. Определите сопротивление цепей, изображённых на рисунке 102. Обозначенные на рисунке величины известны.

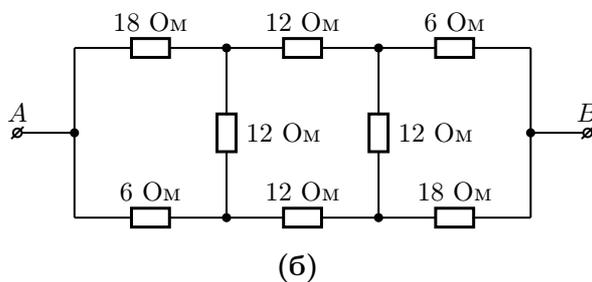
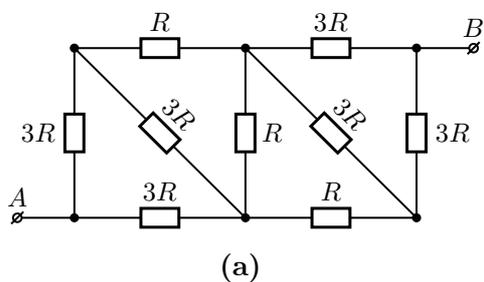


Рис. 102

10 Измерения в электрических цепях

150. Юный экспериментатор достал из шкафа амперметр со шкалой на 250 мА и ценой деления 5 мА, цифровой вольтметр, собственное сопротивление которого порядка 10 кОм, батарейку, ключ, провода и переменный резистор, рассчитанный на максимальное сопротивление около 100 Ом. Экспериментатор собрал цепь, схема которой изображена на рисунке 103 и снял показания амперметра и вольтметра при разных положениях ручки переменного резистора с целью определить ЭДС \mathcal{E} и внутреннее сопротивление r батарейки. Результаты измерений приведены в таблице.

I , мА	125,0	110,0	90,0	80,0	70,0	60,0	50,0	0,0
U , В	4,200	4,248	4,302	4,340	4,362	4,398	4,424	4,576

- а) Как выглядит теоретический график зависимости $U(I)$?
 б) Постройте (на миллиметровке или в программе MS Excel) экспериментальный график зависимости $U(I)$. Определите, используя график, внутреннее сопротивление и ЭДС батарейки. Попробуйте сделать оценку погрешности полученного результата.

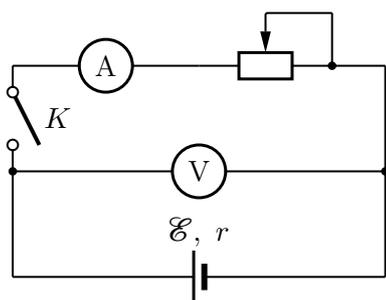


Рис. 103

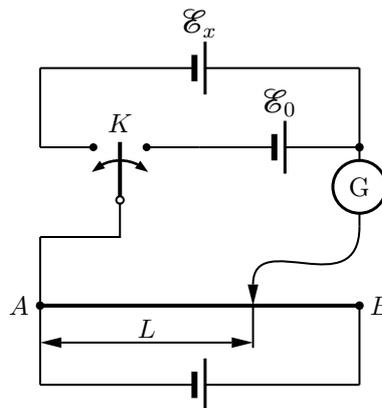


Рис. 104

151. При измерениях ЭДС неизвестного источника \mathcal{E}_x компенсационным методом, собирают цепь, схема которой показана на рисунке 104. \mathcal{E}_0 — известная (эталонная) ЭДС. Реохорд AB представляет собой металлическую струну, по которой можно перемещать подвижный контакт. Вдоль струны расположена линейка, позволяющая измерять L — расстояние между концом струны и контактом. Подключая в цепь с помощью переключателя K сначала эталонный источник \mathcal{E}_0 , а затем исследуемый \mathcal{E}_x , всякий раз положение контакта реохорда подбирают таким образом, чтобы ток через гальванометр был равен нулю. В каждом случае измеряют соответствующие расстояния L_0 и L_x . Зная \mathcal{E}_0 , L_0 и L_x , можно определить \mathcal{E}_x . Определите!

152. Для точного измерения разности сопротивлений двух резисторов $R_x - R_y$ можно использовать мост Кери Фостера, представляющий собой модификацию моста Уитстона. На рисунке 105 изображена схема этого устройства. Серые прямоугольники — широкие медные пластины (шины) с малым сопротивлением. Сопротивления резисторов R_1 и R_2 примерно равны, точное значение знать необязательно. Контакт

C можно перемещать вдоль реохорда AB . Расстояние L , определяющее сопротивление участка AC реохорда, измеряется закрепленной рядом линейкой. В процессе измерения положение скользящего контакта подбирается таким образом, чтобы разность потенциалов между точками подключения чувствительного гальванометра G была равна нулю. В этом случае мост считается сбалансированным.

Для определения $|R_x - R_y|$ сначала устанавливают резистор R_x слева, а R_y справа (как на рис. 105). Контакт C перемещают, балансируя мост. По линейке определяют AC , допустим, получается некоторая величина L_x . Затем меняют резисторы R_x и R_y местами. Передвигают контакт, так чтобы стрелка гальванометра установилась на нуле и мост снова оказался сбалансированным. Измеряют расстояние AC , пусть в этом случае получается L_y . Теперь мы знаем L_x , L_y , пусть также нам известна величина $\sigma = \Delta R / \Delta L$ (сопротивление единицы длины реохорда), вычислите по этим данным $|R_x - R_y|$.

Определим σ в дополнительном эксперименте. Заменяем резистор R_x в исходной схеме на эталонное сопротивление $R_0 = 1$ Ом, а R_y на медную шину с нулевым сопротивлением. Сбалансируем мост, измерим L_0 . Найдите по этим данным σ .

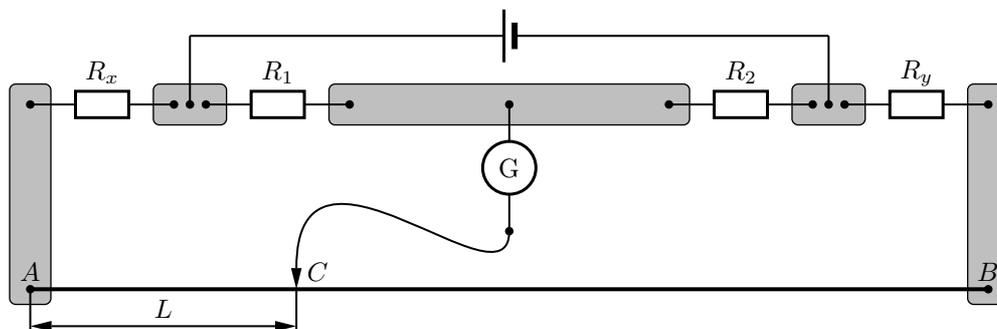


Рис. 105

153. Как определить сопротивления резисторов в схемах на рисунке 106, если у вас есть омметр (прибор для измерения сопротивлений), а также соединительные провода? Опишите процедуру измерения и последующие вычисления искомых величин для цепей, показанных на рисунке. Размыкать контакты нельзя!

Намек: провода нужны, чтобы соединять некоторые точки исследуемой цепи.

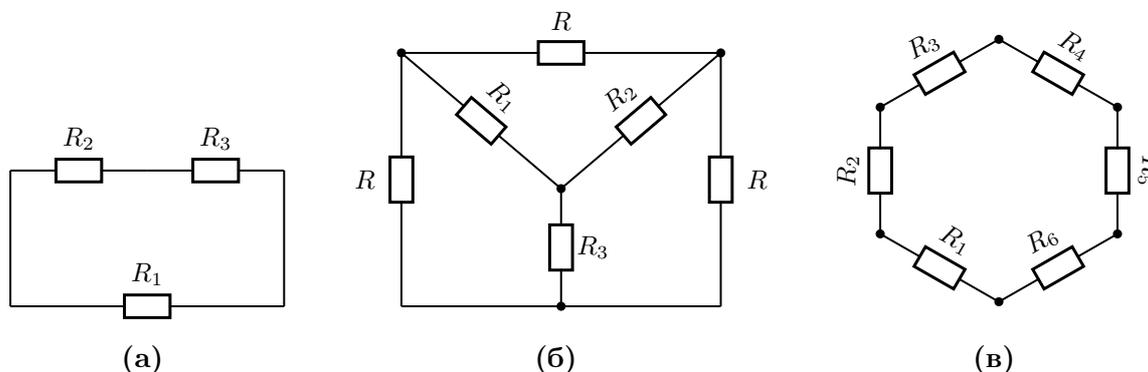


Рис. 106

11 Разные задачи

154. Школьник купил энергосберегающие лампочки. На коробках с лампочками (см. рис. 107) написано: «потребляет 6 Вт», «светит как 50». Эта надпись означает, что энергосберегающая лампочка потребляет из электросети мощность 6 Вт, но выделяет в виде света столько же энергии, сколько обычная лампочка накаливания, которая потребляет из сети мощность 50 Вт. Найдите КПД энергосберегающей лампочки, если известно, что КПД обычной лампочки накаливания равен 5%.



Рис. 107

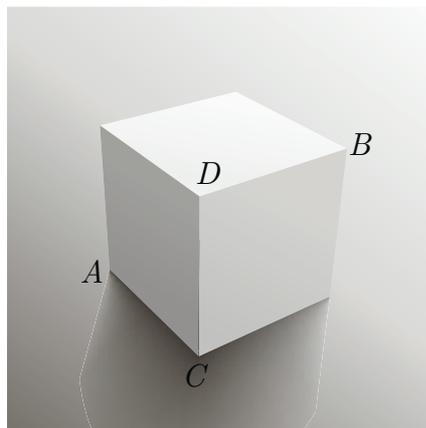


Рис. 108

155. Имеется электрическая схема, собранная из линейных элементов: батареек и резисторов. Между двумя точками этой схемы подключают сначала идеальный вольтметр, потом его отключают и подключают идеальный амперметр. Показания приборов оказываются равными U_0 и I_0 соответственно. Какой ток пойдет через резистор с сопротивлением R , если его включить между точками A и B ?

156. (Рег.этан, 2007, 9 кл.) Из тонких однородных листов жести спаяли полый куб (см. рисунок 108), к двум противоположным вершинам A и B которого припаяли проводники. Сопротивление куба между этими проводниками оказалось равным $R = 7$ Ом. Найдите силу тока, пересекающего ребро CD куба, если проводники подключены к напряжению $U = 42$ В.

12 Приложения

12.1 Об электродвижущих силах

Представим себе, что имеется два одинаковых металлических шара, на которые нанесены заряды разных знаков: $+Q$ и $-Q$. Соединим шары проводом. Что произойдёт? Заряды шаров создают в проводе электрическое поле. Под действием электрических сил электроны сместятся в сторону положительно заряженного шара. Можно сказать, что избыток электронов с отрицательно заряженного шара перетечёт на положительно заряженный шар. Это произойдёт за небольшое время, в течение которого по проводу будет течь ток. После того, как заряды шаров станут равны нулю (вследствие перетекания электронов), ток прекратится. Если бы в наш провод была впаяна электрическая лампочка, то она бы светилась в течение небольшого времени перетекания заряда, иначе говоря, мигнула. Допустим, нам было бы желательно, чтобы лампочка горела значительно большее время, тогда нам каким-то образом придётся поддерживать заряды шаров постоянными, ведь именно заряженные шары порождают электрическое поле, заставляющее электроны в проводе двигаться. Например, мы могли бы это делать, подключив шары к электрофорной машине или к батарее. Силы, поддерживающие на одном шаре заряд $+Q$, а на другом $-Q$ в рассматриваемом примере называются *электродвижущими*. Это не те силы, что заставляют электроны двигаться по проводу через лампочку, а другие, — сторонние. Отметим, что шары были введены в рассмотрение для наглядности. Те же рассуждения можно провести и для любой другой конфигурации.

С энергетической точки зрения работа электродвижущих сил (ЭДС) затрачивается на то, чтобы поддерживать ток через лампочку постоянным. В самом простом случае работа ЭДС равна работе тока, текущего по проводу. Устройство, осуществляющее разделение зарядов, называется *источником ЭДС*. В силу того, что детали, из которых изготовлен источник ЭДС, могут иметь электрическое сопротивление (его называют *внутренним сопротивлением*), не вся работа ЭДС идёт на поддержание тока через лампочку. Часть работы теряется в виде тепловых потерь на внутреннем сопротивлении, поэтому:

$$A_{\text{ЭДС}} - Q_r = A_{\text{тока}}, \quad (1)$$

где Q_r — тепловые потери на внутреннем сопротивлении источника. Работа тока равна работе электрических сил, заставляющих электроны в проводе двигаться. По определению напряжение (или падение потенциала) на проводе равно отношению работы по перемещению заряда Δq к величине этого заряда:

$$U = \frac{A_{\text{тока}}}{\Delta q}, \quad (2)$$

Аналогичным образом можно ввести величину ЭДС \mathcal{E} , количественно характеризующую работу сторонних сил:

$$\mathcal{E} = \frac{A_{\text{ЭДС}}}{\Delta q}, \quad (3)$$

которая также, как и напряжение, измеряется в вольтах. Буква \mathcal{E} читается «Е», хотя чаще её называют просто «ЭДС». Формула (1) теперь может быть переписана в виде:

$$\mathcal{E} - U_r = U, \quad (4)$$

отражающем тот факт, что напряжение на проводе с лампочкой равно ЭДС источника за вычетом напряжения на его внутреннем сопротивлении. Если сопротивление проводка с лампочкой равно R , а внутреннее сопротивление источника равно r , то:

$$\mathcal{E} - Ir = IR, \quad (5)$$

где I — ток, текущий через лампочку. Очевидно, что через внутреннее сопротивление течёт тот же ток I .

Источники ЭДС могут иметь совершенно разное устройство, природа электродвижущих сил может быть тоже совершенно разной. Например: гальванический элемент (батарейка), электрофорная машина или генератор Ван-дер-Граафа, солнечная батарея, термопара — всё это — различные источники ЭДС. На самом деле, когда раньше мы говорили: «идеальная батарейка с напряжением U_0 », то имели в виду источник ЭДС с нулевым внутренним сопротивлением и $\mathcal{E} = U_0$. У реальных батареек внутреннее сопротивление не равно нулю и составляет, как правило, единицы Ом. Например, цилиндрические батарейки на 1,5 вольта формата «АА» или «ААА» имеют внутреннее сопротивление от 1 до 6 Ом.

В заключение отметим, что рассматривая работу в единицу времени, иначе говоря, мощность, можно преобразовать формулу (1) так:

$$\mathcal{E}I - I^2r = I^2R. \quad (6)$$

Другими словами, мощность ЭДС за вычетом мощности потерь на внутреннем сопротивлении равна мощности, которая выделяется на сопротивлении нагрузки.

12.2 О нелинейных элементах

Рассмотрим обычный резистор сопротивлением R . По закону Ома ток через резистор определяется соотношением:

$$I = \frac{U}{R} = \frac{1}{R} \cdot U, \quad (7)$$

где U — напряжение на резисторе. Формула (7) выглядит также, как формула, задающая линейную зависимость: $y = kx$, которая изучается в курсе алгебры. Действительно, ток I уподобляется y , напряжение U — переменной x . Аналогом коэффициента k является величина $1/R$ — обратное сопротивление проводника. На уроках математики в 7 классе изучается график функции $y = kx$, показывается, что графиком является прямая, проходящая через начало координат.

Построим подобный график для зависимости $I(U) = (1/R) \cdot U$, выбрав удобное значение сопротивления $R = 100$ Ом. Этот график называется **вольт-амперной характеристикой** резистора R и представляет собой прямую, проходящую через начало координат. Для построения этой прямой достаточно знать координаты любой точки, принадлежащей ей, кроме нулевой. Вычислим значение тока для некоторого значения напряжения, например для $U_A = 10$ В. Получится $I_A = 100$ мА. Прямая OA на рисунке 109 (отмечена буквой R) и есть искомый график

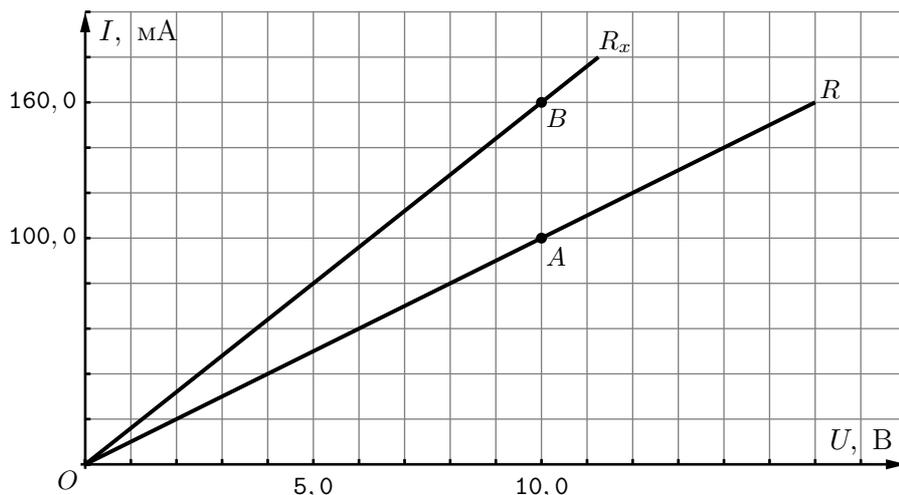


Рис. 109: Вольт-амперные характеристики резистора сопротивлением $R = 100$ Ом и резистора с неизвестным сопротивлением R_x .

Поставим теперь обратную задачу: имеется вольт-амперная характеристика неизвестного резистора R_x (на рис. 109 отмечена обозначением R_x), требуется определить сопротивление резистора. Рассмотрим т. B , принадлежащую графику. Из закона Ома (7) следует, что:

$$R_x = \frac{U_B}{I_B} = \frac{10 \text{ В}}{160 \text{ мА}} = 62,5 \text{ Ом.}$$

Обратите внимание значение сопротивления R_x меньше $R = 100$ Ом, при этом вольт-амперная характеристика резистора R_x составляет бóльший угол с горизонтальной

прямой, чем характеристика резистора R . Это вполне объяснимо. Ведь наклон графика зависимости $y = kx$ определяется коэффициентом k : чем больше k , тем больше угол между графиком и горизонтальной осью. В нашем случае $k = 1/R$, поэтому чем меньше (!) сопротивление R , тем больше угол. Нулевому сопротивлению соответствует вертикальная прямая.

Вольт-амперную характеристику (далее пишем сокращённо: ВАХ) можно построить для любого элемента электрических цепей. Однако, для большинства электронных компонентов ВАХ имеет более сложный вид, чем линейная характеристика резистора. Например, ВАХ миниатюрной лампы накаливания, рассчитанной на напряжение 18 В, приведена на рисунке 110. Элементы схем с криволинейной вольт-амперной характеристикой (как у лампы) называют **нелинейными**.

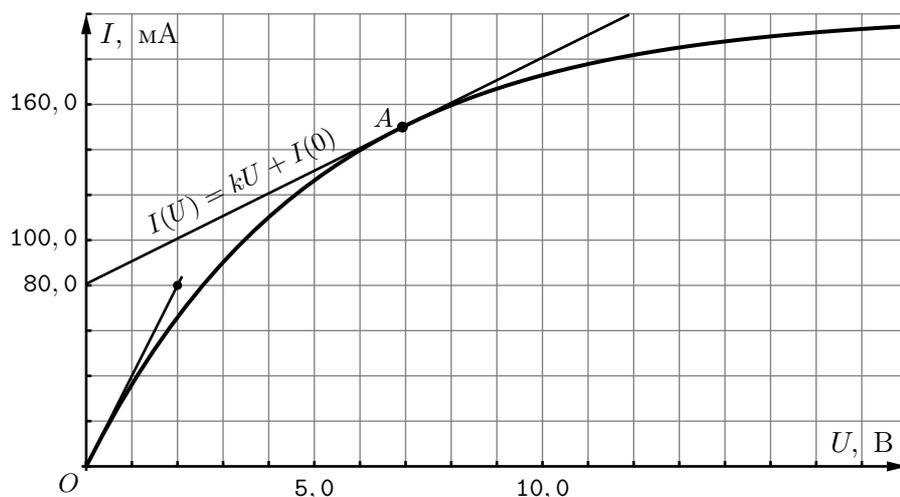


Рис. 110: Вольт-амперная характеристика лампочки накаливания ($U_0 = 18$ В, $P_0 = 3,5$ Вт) и две касательные к графику ВАХ, проведённые в точках $U_0 = 0$ и $U_A = 6,93$ В.

Для нелинейных элементов можно ввести в рассмотрение величину, похожую на сопротивление резистора, так называемое **дифференциальное сопротивление** $R_{\text{диф}}$. Попробуем объяснить, что это такое на примере вышеупомянутой лампочки. Вблизи нуля график ВАХ лампочки близок к касательной, которая в свою очередь является ВАХ некоторого резистора. Определим сопротивление этого резистора: при напряжении 5 В, как следует из рисунка, ток через резистор равен 200 мА, поэтому его сопротивление: $R_0 = 25$ Ом. Это значение будем считать дифференциальным сопротивлением лампочки при $U = 0$: $R_{\text{диф}}(0) = 25$ Ом. Проведём теперь касательную к графику в другой точке (т. А на рисунке 110). Любая касательная определяется уравнением $I(U) = kU + I(0)$ (по аналогии с уравнением для линейной функции $y = kx + b$). **Дифференциальным сопротивлением** будем называть величину:

$$R_{\text{диф}} = \frac{1}{k}, \quad (8)$$

обратную к коэффициенту наклона касательной. Вычислить дифференциальное сопротивление по графику можно, если заметить, что для точек, лежащих на касатель-

ной $I(U) = kU + I(0)$, при изменении U на ΔU значение функции $I(U)$ изменяется на ΔI , при этом: $\Delta I = k\Delta U$. Таким образом дифференциальное сопротивление определяется соотношением:

$$R_{\text{диф}} = \frac{\Delta U}{\Delta I}. \quad (9)$$

Ещё раз подчеркнём, ΔU и ΔI в формуле (9) берутся вдоль касательной.

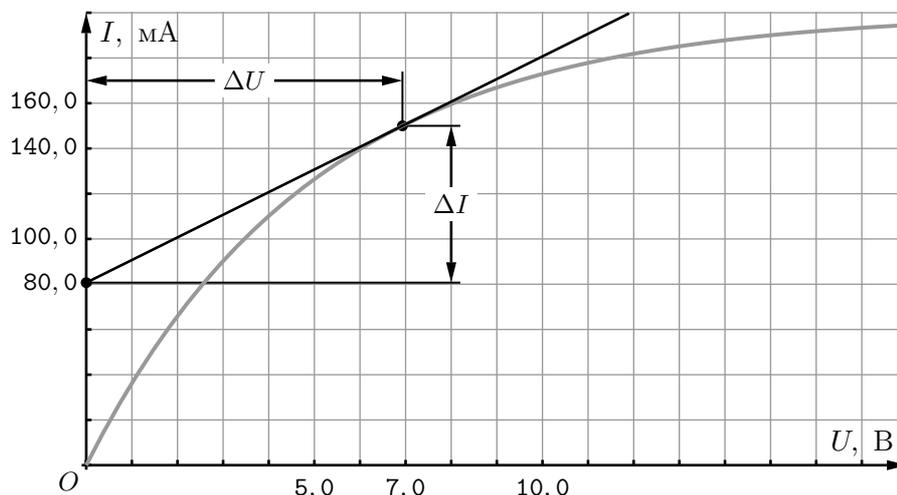


Рис. 111: К определению $R_{\text{диф}}$ по графику касательной. Показаны две точки касательной (выбраны из соображений удобства), для которых: $\Delta U \approx 7$ В и $\Delta I \approx 70$ мА.

Вычисление с использованием графика (см. рис. 9) даёт при напряжении $U_A = 6.93$ В значение дифференциального сопротивления: $R_{\text{диф}}^{(A)} \approx 100$ Ом (на самом деле, это точное значение). В нуле напомним было: $R_{\text{диф}}(0) = 25$ Ом. Таким образом с ростом напряжения на лампочке её дифференциальное сопротивление растёт. Действительно, дифференциальное сопротивление определяется угловым коэффициентом касательной k . С увеличением напряжения угловые коэффициенты соответствующих касательных уменьшаются, а дифференциальное сопротивление согласно определению (8) увеличивается.

Можно ли утверждать, что дифференциальное сопротивление является полным аналогом обычного сопротивления? Например, будет ли справедлива формула для тепловой мощности, выделяющейся на резисторе: $P = U^2/R$, для нелинейного элемента, если в неё подставить $R_{\text{диф}}$ вместо R ? Нет! это утверждение совершенно неверное! Количество теплоты, выделяющееся на нелинейном элементе за время Δt , равно работе сил электрического поля:

$$\Delta Q = \Delta A = UI\Delta t = U \cdot \left(\frac{U}{R_{\text{диф}}} + I(0) \right) \Delta t = \frac{U^2}{R_{\text{диф}}} \Delta t + UI(0)\Delta t,$$

где $I(0)$ — параметр соответствующей касательной. Таким образом для мощности справедлива формула: $P = UI$, а формула: $P = U^2/R_{\text{диф}}$ — нет.

13 Ответы, решения

13.1 Основные понятия.

1. 0,16 мкА.
2. Искомый заряд равен площади под графиком зависимости $I(t)$. $q = 360$ Кл, что составляет: $(q/q_0) = 0,2$ % от полного заряда аккумулятора.
3. $v = I/(nSe) = 0,1$ мм/с.
4. Всего возможно $N = 3 + 2 + 1 = 6$ значений: 12 В, 5 В, 3,3 В, 8,7 В, 1,7 В, 7 В.
5. Зависимость потенциала от длины l между рассматриваемой точкой и отрицательным полюсом даётся формулой: $\varphi(l) = U_0(l/L)$; $\varphi(l) = -U_0 + U_0(l/L)$; $\varphi(l) = -(U_0/2) + U_0(l/L)$.
6. $R = 1,12$ Ом, $R/R_0 \approx 4,5$ %.
7. 1 метр.
8. Сопротивление между ладонями человека складывается из сопротивления двух слоёв эпидермиса (наружного слоя кожи) ладоней $2R$ и сопротивления оставшейся части тела r . Эпидермис плохо проводит электрический ток по сравнению с другими тканями тела, обладает большим удельным сопротивлением, поэтому: $2R \gg r$. Таким образом, сопротивление между ладонями определяется главным образом сопротивлением эпидермиса, которое обратно пропорционально площади контакта ладоней с фольгой. Площадь контакта увеличивается (а сопротивление уменьшается), если человек прикладывает усилие, давит на фольгу.
Кстати, можно подобным образом измерять силу.
9. а) $I_{100} = I_{200} = 10$ мА. б) $I_{150} = 30$ мА, $I_{225} = 20$ мА, $I_{300} = 15$ мА. в) $I_{50} = 0$, $I_{100} = I_{500} = 20$ мА. г) $I_{50} = 40$ мА, $I_{100} = 10$ мА, $I_{500} = 30$ мА. д) $I_{75} = 40$ мА, $I_{50} = 40$ мА, $I_{57} = 90$ мА, $I_{100} = 10$ мА. е) $I_{40} = I_{80} = 50$ мА, $I_{50} = 0$, $I_{25} = I_{75} = 80$ мА.
10. Доказательство следует из равенства напряжений на резисторах: $i_1 R_1 = i_2 R_2$.
11. а) $U_{AB} = 4,5$ В. б) $U_{AB} = 12$ В. в) $U_{AB} = 4$ В. г) $U_{AB} = 4,5$ В. д) $U_{AB} = 1,5$ В.
12. а) Следует из соотношения для напряжений: $U_0 = U_1 + U_2$. б) Следует из соотношения для токов: $i_0 = i_1 + i_2$.
13. Доказательство следует из неравенства: $(1/R_0) > (1/R_k)$, которое справедливо для любого k от 1 до n .
14. а) r . б) $2r$. в) $2r$.
15. Уменьшилось в 9 раз.
16. $R = R_0/1600 = 0,01$ Ом.
17. Если ни один из резисторов не закорочен (закоротить резистор можно, если оба его вывода присоединить к одной точке), то: 2 кОм, 4 кОм, 9 кОм, 18 кОм. Если закорочен один из трёх, то: 12 кОм, 3 кОм. Если закорочены два, то: 6 кОм.
18. $I_{max} = 16,5$ мА, $I_{min} = 1,5$ мА.

19. Чтобы получить $r_1 = 9$ Ом необходимо присоединить омметр в точках, лежащих на одном диаметре. Для $r_2 = 8$ Ом следует подключить омметр так, чтобы точки подключения делили кольцо на две части с сопротивлениями 12 Ом и 24 Ом. Так как значения всех сопротивлений — целые числа, сделать можно без квадратного уравнения, «интеллектуальным» перебором. Максимальное сопротивление 9 Ом. Доказательство следует из того факта, что при параллельном соединении R_1 и R_2 эквивалентное сопротивление меньше любого из R_1, R_2 .

20. а) $U_0 = 4,5$ В, $I_0 = 15$ мА, $\Delta\varphi_{AB} = +3$ В. б) $U_0 = 9$ В, $I_0 = 160$ мА, $\Delta\varphi_{AB} = -6$ В. в) $U_0 = 5$ В, $I_0 = 50$ мА, $\Delta\varphi_{AB} = +3$ В. г) $U_0 = 9$ В, $I_0 = 30$ мА, $\Delta\varphi_{AB} = +1,8$ В. д) $U_0 = 4,5$ В, $I_0 = 3$ мА, $\Delta\varphi_{AB} = -0,75$ В.

21. а) $R = 10$ Ом, $U_0 = 4,1$ В. б) $R = 0,5$ кОм, $U_0 = 5$ В.

22. а) $I_6 = 5$ мА, $I_2 = 15$ мА, $I_3 = 10$ мА. б) $I_4 = 1$ мА, $I_2 = 3$ мА

23. Ток через AB будет равен нулю, если отношение токов через резисторы в левом и правом параллельных соединениях (равное обратному отношению сопротивлений) одинаковое: $(R_x/r_2) = (R/r_1)$. $R_x = R(r_2/r_1)$.

24. Разность потенциалов на AB будет равна нулю в том случае, если отношение напряжений на резисторах в верхнем и нижнем последовательных соединениях (равное отношению сопротивлений) одинаковое: $(r_1/r_2) = (R/R_x)$. $R_x = R(r_2/r_1)$.

25. а) $25r/12$. б) $10r/3$. в) $\approx 5,43r$.

26. а) $U_V = 3,6$ В. б) $I_A = 20$ мА. в) $U_V = 1$ В, $I_A = 0$.

27. а) Из пяти резисторов можно сделать 0,2 кОм, ещё из двух 0,5 кОм. б) Из пяти делаем 1,2 кОм. Из четырёх — 1,0 кОм (последовательно два по 0,5 кОм). Соединяем четыре с оставшимся пятым параллельно, получаем 0,5 кОм.

28. Можно получить разные дроби, в разной степени приближающие $\sqrt{2} \approx 1,4142135$. Например, такие:

$$\frac{7}{5} = 1,4, \quad \frac{17}{12} \approx 1,4167, \quad \frac{65}{46} = 1,41304, \quad \frac{58}{41} = 1,41463.$$

На рисунке 112 показано, как получить $58/41$ (из вышеперечисленных самое близкое к $\sqrt{2}$).

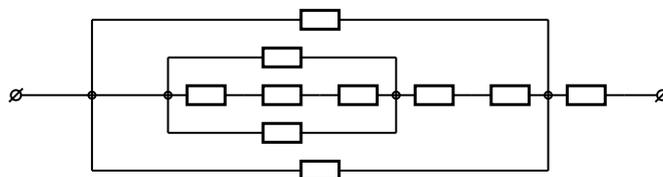


Рис. 112

29. $R = 22$ Ом, $I = 10$ А.

13.2 Симметричные схемы. Ответы.

30. а) Потому что цепь симметрична относительно плоскости, проходящей через резистор без обозначения перпендикулярно плоскости рисунка. б) Резистор без обозначения и самый короткий проводник (лежащие в плоскости симметрии) можно отключить. в) $R_{AB} = 220 \text{ Ом}$, $I_{AB} = 0,1 \text{ А}$. г) $I_{3r} = 20 \text{ мА}$, $U_{2r} = 6 \text{ В}$.

31. Потому что через резисторы с одинаковым сопротивлением текут одинаковые токи, что следует из симметрии схемы. Не верно, $U_r \neq U_{3r}$. Верно, $U_{2r} = 2U_r$. в) $R_{AB} = 350 \text{ Ом}$, $I_{AB} = 10 \text{ мА}$. г) $U_{3r} = 1,5 \text{ В}$, $U_r = 0,25 \text{ В}$, $U_{CD} = 2 \text{ В}$.

32. а) Через все резисторы кроме $2R$ на AC ; $I_{AC} = 0$. Верно, $U_{BC} = U_{BA}$. $R_{BD} = 2r/3 = 40 \text{ Ом}$. б) $R_{AC} = R_{BD} = 40 \text{ Ом}$. в) $I_{BC} = I_{BA} = I_{AD} = I_{CD} = I_{BD} = (50) \text{ мА}$, $I_0 = 0,15 \text{ А}$.

33. а) $10/9 \text{ Ом}$. б) $11/18 \text{ Ом}$; $5/6 \text{ Ом}$.

34. 1 В ; 3 В .

35. а) $8r/15$; $4r/5$. б) $6r/5$.

36. $U_V = 6U_0/7$, $I_0 = 6U_0/7r$, $I_{AB} = 2U_0/7r$.

37. а) 40 Ом , 72 Ом . б) 48 Ом ; 42 Ом .

38. $U_1 = 6 \text{ В}$, $U_2 = 0$, $U_3 = 2,4 \text{ В}$, $U_4 = 1,2 \text{ В}$.

39. а) $4r/5$; $3r/4$. б) $9r/20$.

40. $U_V = (1/3)U_0$, $I_A = U_0/6R$.

41. а) $R/2$. б) $7R/24$.

42. а) $3r/4$. б) $5r/6$ в) $7r/12$.

43. $U_V = 2U_0/7$, $I_{max} = U_0/r$, $I_{min} = U_V/2r = U_0/7r$.

44. а) Вариантов может быть много. Из очевидных: куб, $R_{AB} = 5R/6$; две треугольные пирамиды, сложенные основание к основанию, $R_{AB} = 2R/3$. Менее очевидный вариант — додекаэдр, $R_{AB} = 7R/6$.

б) Простой вариант — две пятиугольные пирамиды, сложенные основание к основанию, $R_{AB} = 2R/5$. Сложный — икосаэдр, $R_{AB} = R/2$.

45. $R_{AB} = 10 \text{ Ом}$, $R_{AC} = 12 \text{ Ом}$.

46. $R_{AB} = 3r/4$.

47. а) $R/2$; б) токи не текут в вертикальных рёбрах, параллельных AA' , их можно убрать, ничего не изменится. в) 8 А ; г) 4 А .

48. $R_0 = 2R/N$.

49. $R_{AB} = 5R/9$.

50. $R_{AB} = 13r/20$.

51. $R_{AB} = (3R/5) = 3 \text{ Ом}$.

13.3 Перемычки и амперметры

52. $4r$ и $5r$.
53. а) $I_1 = 0,11$ А. б) $I_2 = 60$ мА.
54. $R_{AB} = (r/2) = 45$ Ом, $I_0 = 100$ мА. $I_1 = I_2 = 75$ мА
55. При замкнутом: $R_{AB} = r$, при разомкнутом: $R_{AB} = 2r$.
56. При замкнутом: $I_A = 10$ мА, при разомкнутом: $I_A = 5$ мА.
57. $I_1 = 3$ мА, $I_3 = 1$ мА, $I_2 = I_1 - I_3 = 2$ мА.
58. $I_A = 10$ мА.
59. $I_0 = 11$ мА, $I_1 = 8$ мА, $I_2 = 5$ мА.
60. $I_A = 10$ мА, $I_0 = 80$ мА.
61. $I_2 = 10$ мА.
62. а) $R_{AC} = 8R/5$; б) $R_{AB} = 49R/60$.
63. а) $R_{AC} = R/2$; б) $R_{AB} = 7R/24$.
64. $I_1 = 2$ мА, $I_2 = 1$ мА.
65. $(3000/9)$ Ом $< r < (3000/11)$ Ом. Имеет смысл сначала рассмотреть нулевое приближение, считая, что через A_2 ничего не течёт. Дальнейшие расчёты удобно делать приближённо, считая I_2 малым по сравнению с другими токами.
66. $I_1 = I_2 = 10$ мА, $U_1 = 7,5$ В, $U_2 = 20$ В.
67. $I_{max} = I_4 = 13,3$ мА, $I_{min} = I_5 = 2$ мА.
68. $I_1 = 6$ А, $I_2 = I_3 = 3$ А, $I_4 = 0$.
69. $I_1 = (1/4)I_0$.

13.4 Электроизмерительные приборы.

70. $I_A \approx 30 \text{ мА}$; $I_A = 250 \text{ мА}$; $I_A = 1 \text{ А}$. В первом случае ($R_1 = 150 \text{ Ом}$), потому что сопротивление амперметра оказывается много меньше сопротивления резистора.

71. $U_V \approx 4,5 \text{ В}$; $U_V = (30/7) \text{ В} \approx 4,3 \text{ В}$; $U_V = 3 \text{ В}$. В первом случае ($R_1 = 60 \text{ Ом}$) и с натяжкой во втором, потому что сопротивление вольтметра оказывается много больше сопротивления резисторов.

72. Можно, потому что через вольтметр течёт пренебрежимо малый ток по сравнению с током через резистор. $I_V = U_1/R_V = 5 \cdot 10^{-5} \text{ А} \Rightarrow I_V \ll I_1$, следовательно $R_V \gg R$. График зависимости $I(U)$ представляет собой прямую, точки которой удовлетворяют уравнению: $I = U/R$, где $R = 100 \text{ Ом}$ — сопротивление резистора (определяется по данным в задаче показаниям приборов). $U_2 = 5 \text{ В}$.

73. Если ток через амперметр близок к нулю, вольтметр покажет напряжение, равное U_0 . График зависимости $I(U)$ представляет собой прямую, точки которой удовлетворяют уравнению: $I = (U_0/R) - (U/R)$, где $R = 100 \text{ Ом}$, $U_0 = 4,5 \text{ В}$ — сопротивление резистора и напряжение источника (определяются по данным в задаче показаниям приборов).

74. $U_1 = 2,4 \text{ В}$, $U_2 = 3,6 \text{ В}$, $I_A = 120 \text{ мА}$; $U_1 = 3,0 \text{ В}$, $U_2 = 4,0 \text{ В}$, $I_A = 100 \text{ мА}$.

75. Параллельно, $n = 1 + R_A/R$; последовательно $n = 1 + R/R_V$.

76. $U_1 = 4,5 \text{ В}$, $U_2 = 0$; $U_1 = 0$, $U_2 = 4,5 \text{ В}$; $U_1 = U_2 = 2,25 \text{ В}$. График зависимости $U_1(U_2)$ представляет собой прямую, проходящую через точки с координатами $(0, U_0)$ и $(U_0, 0)$.

77. $r = (U_0/I) - R$.

78. $R_1 = RR_V/(R + R_V)$, $R_2 = R + R_A$.

79. $I_A = 0$; $I_A = 10 \text{ мА}$; $I_A = 22,5 \text{ мА}$.

80. $I_1 = 20 \text{ мА}$, $I_2 = 5 \text{ мА}$, $U_V = 2 \text{ В}$.

81. $U_0 = 4 \text{ В}$, $R = 200 \text{ Ом}$, $I_2 = 4 \text{ мА}$.

82. $U_V = 0,84 \text{ В}$. Показания вольтметра увеличатся до $U'_V = 1,0 \text{ В}$.

83. $U_1 = 4 \text{ В}$, $U_2 = U_3 = 1 \text{ В}$; $U_1 = 3 \text{ В}$, $U_2 = U_3 = 2 \text{ В}$.

84. Сначала показываем, что: $R_V = 20R$. $U_1 \approx (U_0/20) = 0,275 \text{ В}$, $U_{19} \approx (10U_0/11) = 5 \text{ В}$.

85. Имеет смысл сначала доказать, что $R_V = 2R$. $U_5 = 0,5 \text{ В}$.

86. $R = 400 \text{ Ом}$.

87. Для того, чтобы сделать вольтметр, следует подключить последовательно с прибором шунт с сопротивлением $R_V = 200 \text{ кОм}$. Чтобы сделать амперметр, нужен включенный параллельно шунт с сопротивлением $R_A = 6,25 \cdot 10^{-2} \text{ Ом}$. Последняя цифра, конечно же, из области фантастики. Таких сопротивлений не существует. Прибор нужно закоротить специально подобранным проводом. Для справки: медный провод диаметром 1 мм и длиной 1 метр имеет сопротивление $2 \cdot 10^{-2} \text{ Ом}$. На одном из специализированных форумов описано шунтирование амперметра полоской жести от консервной банки, в которой при калибровке делались V-образные вырезы.

88. Соединять нужно параллельно. Минимальная относительная погрешность достигается на дальнем конце шкалы (50 мА), следовательно, чтобы измерять токи близкие к 1 А нужно соединить 20 амперметров параллельно, при этом относительная погрешность измерения составит: $(\Delta I/I) = 20 \cdot 1/1000 = 2 \%$. Во втором случае следует использовать три амперметра. Относительная погрешность: $(\Delta I/I) = 3 \cdot 1/120 = 2,5 \%$.

89. В силу того, что после подключения второго амперметра ток в цепи изменился незначительно (увеличился до 1,02 мА, на 2%), можно считать, что сопротивление вольтметра значительно больше сопротивления амперметра, поэтому вольтметр показывает напряжение батареи, откуда: $R_V = 6$ кОм. Для изменения тока можно получить приближённую формулу: $\Delta i = i_1 \cdot R_A/2R_V$, откуда: $R_A = (4/100)R_V = 240$ Ом.

90. $U_2 = 0,1$ В.

91. $R_V = 1$ кОм, $R_A = 2$ Ом, $R \approx 250$ Ом.

92. $R = \sqrt{R_A R_V} = 400$ Ом. Для этого R : $R_1 = 404$ Ом, $R_2 = 320$ Ом, тогда искомое отношение: $(R_2 - R_1)/(R_2 + R_1) = 0,12 = 12\%$. Если нам неизвестны собственные сопротивления амперметра и вольтметра, то для определения значения неизвестного сопротивления R мы можем собрать две схемы, описанные в задаче 9, и по показаниям приборов определить R_1 и R_2 . Тогда значение R можно оценить по формуле: $R = (R_1 + R_2)/2$, а погрешность измерения по формуле: $\Delta R = |R_1 - R_2|/2$. Таким образом, отношение $(R_2 - R_1)/(R_2 + R_1)$ — это относительная погрешность нашего измерения.

93. $U_2 = 8,6$ В.

94. $U_1 = U_2 = 0,5$ В, $U_3 = 1$ В.

95. $U_1 = 6$ В, $U_2 = 3$ В.

96. $I_0 = 2$ мА.

97. $U_V = 0,2$ В; $R_\Omega = 91$ Ом. $r = 750$ Ом, $U = 1,85$ В.

13.5 Работа и мощность тока.

- 98.** 9 А, 15,9 А, 4,5 А.
- 99.** Если все упомянутые приборы подключить к электрической сети, то ток через автомат будет больше 10 А, он выключится, разорвёт цепь. И это будет происходить всякий раз, когда линию розеток будут нагружать, одновременно подключая все указанные электроприборы. Для надёжности сети желательно, чтобы максимальный ток автомата был больше.
- 100.** Мощность утюга увеличится, потому что $P = U^2/R$, а R — уменьшается.
- 101.** 200 Вт при последовательном подключении и 900 Вт при параллельном.
- 102.** а) $I = \mathcal{E}/(R+r)$, $A_{\mathcal{E}} = \mathcal{E}^2\tau/(R+r)$; б) $Q_r = \mathcal{E}^2\tau r/(R+r)^2$, $Q_R/A_{\mathcal{E}} = R/(R+r)$.
- 103.** $R = 0$. $R = 4$ Ом. График $P(I)$ представляет собой перевёрнутую параболу с вершиной в точке $I_B = 5$ А. При этом токе и выделяется наибольшая мощность. $I = I_B$, если $R = r$.
- 104.** Сопротивление лампочки: $R = U^2/P = 9,6$ Ом. Ток в цепи: $I = \mathcal{E}/(R+r) = 0,4$ А. Мощность ЭДС: $P_0 = \mathcal{E}I = 1,92$ Вт. На внутреннем сопротивлении рассеивается тепловая мощность: $P_r = I^2r = 0,384$ Вт. КПД схемы: $\eta = 1 - (P_r/P_0) = 1 - (\mathcal{E}/Ir) = 0,8 = 80\%$.
- 105.** У медного провода меньше удельное сопротивление, чем у алюминиевого, поэтому при одинаковых токах на медном проводе выделяется меньшее количество теплоты в секунду, которое отводится в окружающую среду вследствие теплопроводности. При монтаже в трубе затруднён теплообмен с окружающей средой.
- 106.** Это происходит из-за того, что у нагретой спирали лампочки сопротивление значительно больше, чем у холодной. $P = 0,44$ Вт. $R_{\text{ном.}} = 20$ Ом, $P_{\text{ном.}} = 1,8$ Вт.
- 107.** Для плавления льда и нагревания образовавшейся воды до 100°C необходимо количество теплоты: $Q_1 \approx 7,5 \cdot 10^5$ Дж, для нагревания воды на 90°C необходимо количество теплоты $Q_2 \approx 7,6 \cdot 10^5$ Дж. Мощности нагревателей отличаются в два раза, а $Q_1/Q_2 \approx 1$. Поэтому раньше закипит в сосуде с водой. Для этого потребуется время: $t = Q_2 R_2 / U^2 \approx 3 \cdot 10^2$ с.
- 108.** Количество теплоты необходимое для нагревания проволоки:

$$Q = mc\Delta t = \rho V c \Delta t = \rho S L c \Delta t = 0,78 \cdot 0,46 \text{ Дж} \approx 0,36 \text{ Дж}.$$

Сопротивление проволоки: $R = \sigma L/S = 1,2$ Ом, ток в цепи: $I = \mathcal{E}/(R+r) \approx 4$ А. Тепловая мощность на проволоке: $P = I^2 R \approx 19$ Вт. Время: $\tau = Q/P \approx 0,019$ с.

109. 10^{-2} Дж. Во втором случае ток через внутреннее сопротивление и батарейку течёт в противоположную (по отношению к току в первом случае) сторону: $I = (U_V - \mathcal{E})/r$. $\Delta Q/\Delta t = 4$ Дж.

110. Для времени нагревания любой из проволочек можно получить:

$$t = (S/I)^2 \cdot (T_{\text{к.}} - T_0) \cdot (\rho c/\sigma).$$

Значения постоянной: $\rho c/\sigma$ для меди, алюминия и никрома равны (без учёта размерности): $19,3 \cdot 10^{13}$, $8,7 \cdot 10^{13}$, $0,32 \cdot 10^{13}$. В силу того, что ток одинаковый, время определяется вычисленными константами. Быстрее всего нагреется никромовая проволока.

111. В этом случае для времени нагревания получаем:

$$t = (L/U)^2 \cdot (T_k - T_0) \cdot (\rho\sigma).$$

Значения постоянной: $\rho\sigma$ для меди, алюминия и нихрома равны (без учёта размерности): $5,9 \cdot 10^{-2}$, $6,8 \cdot 10^{-2}$, $456 \cdot 10^{-2}$. Поскольку напряжение одинаковое, время определяется вычисленными константами. Быстрее всего нагреется медная проволока.

112. а) 6 мин. б) 25 мин.

113. В зависимости от способа соединения секций сопротивление R нагревателя может принимать значения (в порядке убывания): $3R_0 = 9$ Ом, $3R_0/2 = 4,5$ Ом, $2R_0/3 = 2$ Ом, $R_0/3 = 1$ Ом. Зная сопротивление R можно найти ток в цепи по формуле $I = \mathcal{E}/(R+r)$, а затем определить мощность: $P = \mathcal{E}^2 R/(R+r)^2$. Вычислив для каждого способа соединения значение дроби $R/(R+r)^2$, можно обнаружить, что максимальная мощность достигается при $R = 2R_0/3 = 2$ Ом, что соответствует включению двух секций, соединённых последовательно в параллель с третьей. При этом $P_{\mathcal{E}} = 36$ Вт.

114. Если выделяющая мощность в обоих случаях одинаковая, значит ток через резистор всякий раз один и тот же. При последовательном соединении ток через один резистор равен: $I_1 = \mathcal{E}/(r+2R)$. При параллельном: $I_2 = \mathcal{E}/(2r+R)$. Приравнявая токи, получаем: $R = r$.

115. Мощность, потребляемая нагрузкой, равна: $P = (\mathcal{E} - Ir)I$. Обозначим $I_0 = \mathcal{E}/r$ и преобразуем формулу для мощности так:

$$P = \left(\frac{\mathcal{E}}{r} - I\right)Ir = \left(\frac{I_0}{2} + \frac{I_0}{2} - I\right)\left(\frac{I_0}{2} - \frac{I_0}{2} + I\right)r = \frac{I_0^2 r}{4} - r\left(I - \frac{I_0}{2}\right)^2.$$

Максимум достигается при $I = I_0/2$, что реализуется при $R = r$.

116. Решается с использованием результата предыдущей задачи. Внутреннее сопротивление определяется из уравнения: $I_0 r = I(R+r)$. Получается: $r = 1$ Ом, $\mathcal{E} = 6$ В. Максимальная мощность достигается при $R = r$: $P_{max} = \mathcal{E}^2 r/4r^2 = 9$ Вт.

117. $S = 42$ мм²; повысить следует примерно в 10 раз.

118. $T_2 = 2T_1 - T_0 > T_1$.

119. $T_2 = (T_1 + T_0)/2 < T_1$.

120. $t_3 = 330^\circ\text{C}$.

121. $t_{\text{Б}}^{(2)} = 65^\circ\text{C}$. $I_2/I_1 = 1,22$.

122. Очевидно, при маленьких токах сопротивление резистора равно R_0 . Таким образом: $R_0 = 10$ Ом. Если при некотором токе i на резисторе устанавливается температура t , то это означает, что мощность, выделяющаяся на резисторе по закону Джоуля, равна мощности теплоотдачи: $i^2 R_0(1 + \alpha t) = \beta t$, откуда получаем: $t = i^2 R_0/(\beta - \alpha i^2 R_0)$. Последняя формула не имеет смысла, если: $\beta \leq \alpha i^2 R_0$. С физической точки зрения это означает, что мощность тепловыделения превышает мощность теплоотдачи при любых температурах. Равенство в неравенстве, как не трудно догадаться, достигается при $i = I_0$, поэтому: $(\beta/\alpha) = I_0^2 R_0$. Отсюда определяем стационарную температуру при токе $I_0/2$: $t_{1/2} = 1/(3\alpha)$. Сопротивление при этой температуре: $R(t_{1/2}) = 4R_0/3$ и напряжение: $U_{1/2} = 2I_0 R_0/3 = 20$ В.

13.6 Вольт-амперные характеристики

- 123.** $R_1 = 200 \text{ Ом}; R_2 = 50 \text{ Ом}$.
- 124.** Самое большое дифференциальное сопротивление у 5 элемента, в силу того, что касательная к графику его вольт-амперной характеристики, проведённая в точке $U = 8 \text{ В}$, составляет наименьший угол с горизонтальной линией. Самое маленькое — у элемента 1. Приблизённо элементы можно считать подобными резистору с сопротивлением 50 Ом при напряжениях менее $0,5 \text{ В}$.
- 125.** Приблизённо: $70 \text{ мА}, 57 \text{ мА}$.
- 126.** Приблизённо: $4,35 \text{ В}$.
- 127.** а) Напряжение холостого хода: $U_{\text{ХХ}} = 3,75 \text{ В}$ из графика (при $I = 0$). $\mathcal{E} = U_{\text{ХХ}}$.
 б) Ток короткого замыкания из графика ($U = 0$): $I_{\text{КЗ}} = 50 \text{ мА}$. $R = U_{\text{ХХ}}/I_{\text{КЗ}} = 75 \text{ Ом}$.
 в) $I(U) = (\mathcal{E} - U)/r = (3,75 \text{ В} - U)/(75 \text{ Ом})$. г) 30 мА .
- 128.** б) Наибольший ток на резисторе. в) Наибольшее напряжение на стабилизаторе. г) Наибольший ток на резисторе, наибольшее напряжение на светодиоде.
- 129.** График ВАХ на рисунке 113. б) Максимальная мощность в точке А, $U = 7 \text{ В}$.
- 130.** а) $R_1 \approx 1,8 \text{ кОм}, R_2 \approx 2,2 \text{ Ом}$; отличаются примерно в 800 раз. б) $45 \text{ мА}, 46 \text{ мА}$.
 в) $0 \text{ мА}, 2,3 \text{ мА}$.
- 131.** $I = \mathcal{E}/R = 30 \text{ мА}; I = \mathcal{E}/2R = 15 \text{ мА}$.
- 132.** Графики ВАХ для пунктов б) и в) приведены на рисунке 114.

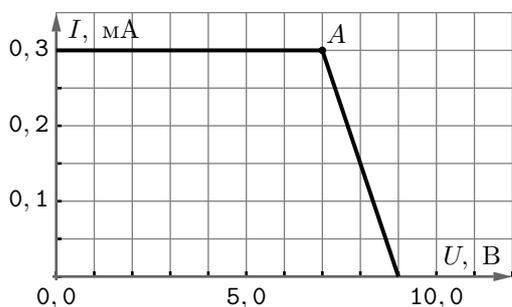


Рис. 113

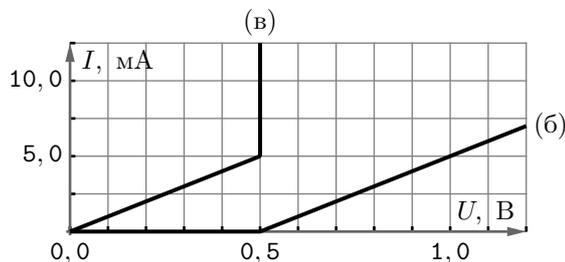


Рис. 114

- 133.** $I_A = 20 \text{ мА}, I_{\mathcal{E}} = 50 \text{ мА}$.
- 134.** $R_{\text{min}} = 70 \text{ Ом}, R_{\text{max}} = 270 \text{ Ом}$. Для надёжности лучше взять R по значениям середины отрезка AB ($I = 20 \text{ мА}, U = 3.2 \text{ В}$): $R = 240 \text{ Ом}$.
- 135.** При номинальном напряжении на выводах блока питания ($3,2 \text{ В}$) ток через светодиод составляет $I_1 = 20 \text{ мА}$. При изменении напряжения на выходе блока на 5% ток изменяется на $(50 \text{ мА}/0,5 \text{ В}) \cdot (3,2 \text{ В}) \cdot 5\% = 16 \text{ мА}$, что составляет 80% номинального тока $I_0 = 20 \text{ мА}$. Таким образом, при понижении напряжения светодиод будет светить очень слабо, а при повышении может просто сгореть. Если светодиод подключить к тому же блоку питания хотя бы через резистор 10 Ом , то при изменении напряжения на 5% , ток через светодиод будет изменяться уже на 40% . Но лучше подключить этот светодиод к источнику с напряжением $5,0 \text{ В}$ последовательно с резистором сопротивлением 90 Ом (для достижения

тока через светодиод в 20 мА). Тогда изменение напряжения блока питания на 5% будет приводить к изменению тока через светодиод всего лишь на 12,5%, что вполне приемлемо.

136. Решение следует из рисунка 115. Сначала нужно построить прямую $U(I) = -\mathcal{E}_2 - Ir_2$, которая является вольт-амперной характеристикой «перевернутой» \mathcal{E}_2 . Далее складываем ВАХ \mathcal{E}_1 с характеристикой для «перевернутой» \mathcal{E}_2 .

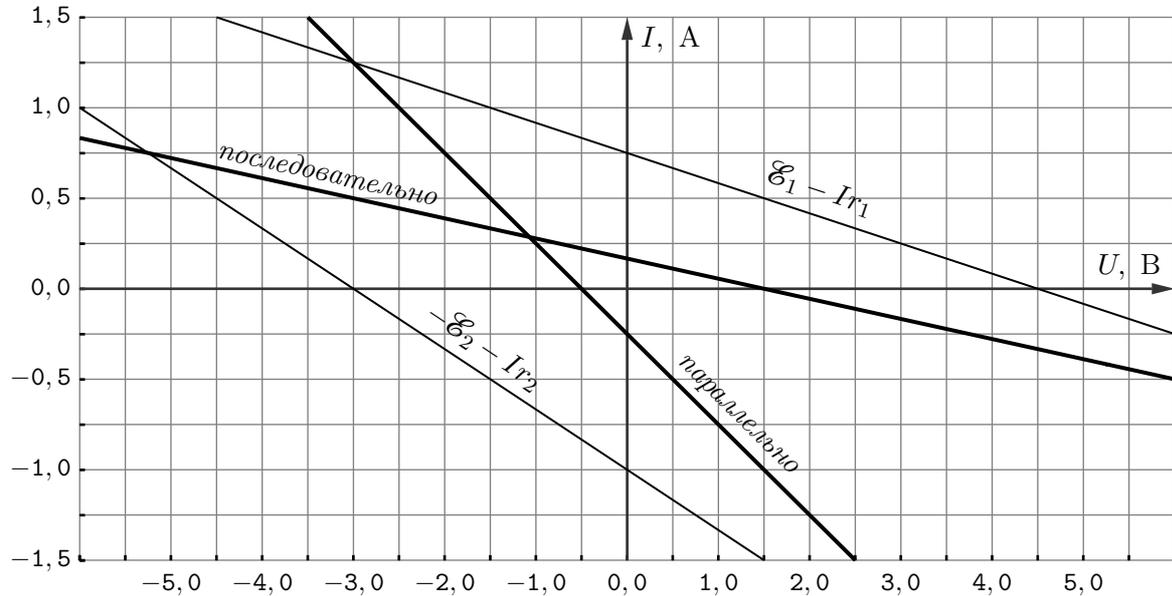


Рис. 115

137. Рабочая точка определяется по графику (см. рис. 116). Напряжение на лампе: $U_L = 1,5$ В, на резисторе: $U_r = 2,5$ В. Сила тока: $I_L = 0,25$ А. Движок реостата должен располагаться так, чтобы отношение сопротивлений левой и правой частей реостата было равно отношению напряжений на лампе и резисторе: $R_L/R_R = 3/5$.

138. В силу того, что при последовательном соединении ток через лампы одинаковый, напряжения на них будут равны. Рабочая точка для одной лампы даётся графическим решением уравнения: $U_L = (\mathcal{E}/2) - I(r/2)$, на рисунке 117 — точка А. С большой точностью напряжение и ток в А равны: 1 В и 0,2 А. Таким образом, ток через батарейку: 0,2 А, суммарная мощность на лампах: 0,4 Вт. В случае параллельного соединения рабочая точка — точка В на рисунке. Верно, суммарный ток: $0,4 \text{ А} < I < 0,6 \text{ А}$.

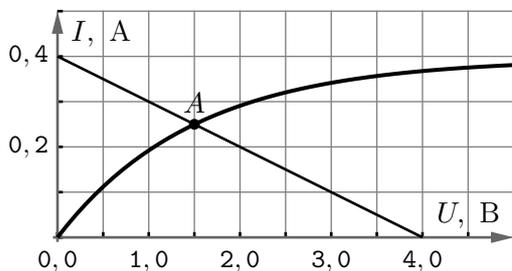


Рис. 116

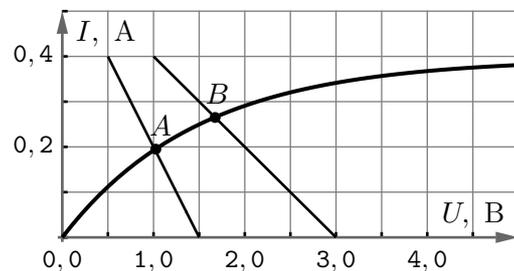


Рис. 117

139. Решение получается вычитанием из характеристики соединения характеристики

резистора. Поясняющие графики приведены на рисунках 118 и 119.

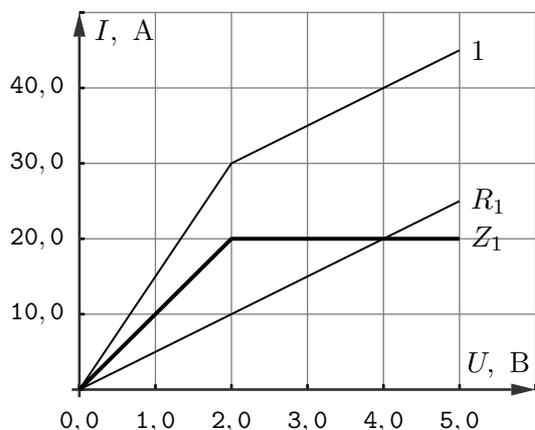


Рис. 118

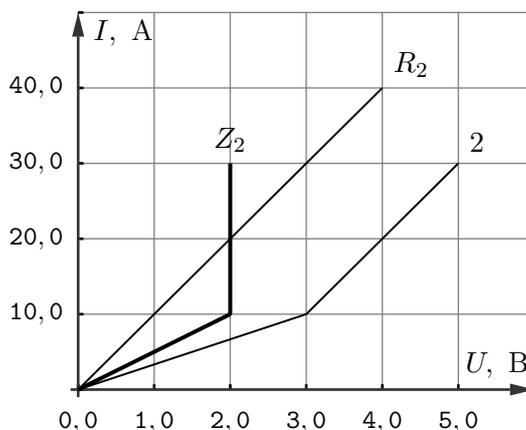


Рис. 119

140. Нижний стабилитрон открыт в прямом направлении, напряжение на нём равно нулю. Предположим, что верхний закрыт, тогда окажется, что напряжение на нём (4,5 В) больше напряжения стабилизации, чего быть не может, следовательно верхний стабилитрон открыт и работает в режиме стабилизации, напряжение на стабилитроне: 3 В. Если i_1 — ток через нижний стабилитрон, а i_2 — через верхний, то: $i_1 R = i_2 R + 3$ В. Ток через батарею равен сумме токов через стабилитроны: $i_0 = i_1 + i_2 = 2i_2 + (1/R) \cdot 3$ В. Из этого соотношения получается уравнение: $\mathcal{E} = 2i_2 R + 3$ В + $i_2 R + 3$ В, откуда: $i_2 = 10$ мА, $i_1 = 40$ мА, $i_0 = 50$ мА. Вольтметр показывает: $U_V = i_0 R = 5$ В, амперметр: $I_A = i_2 = 10$ мА.

141. Без нагрузки (что эквивалентно бесконечно большому сопротивлению нагрузки) ток через стабилитрон определяется сопротивлением резистора $R = 1$ кОм, которое много больше дифференциального сопротивления стабилитрона (40 Ом). Поэтому зависимость напряжения на выходе от напряжения на входе даётся формулой: $U_{\text{вых}} = 9 \text{ В} + (1/25)(U_{\text{вх}} - 9 \text{ В})$. При напряжениях больших 25 В часть тока, текущего через R , должна ответвляться на нагрузку, чтобы ток через стабилитрон не превышал 25 мА. В предельном случае напряжения 40 В на входе сопротивление нагрузки не должно превышать 200 Ом.

142. а) 10 мА; б) 0,18 А. Имеет смысл доказать, что в обоих случаях рабочая точка для лампочек в параллельном соединении располагается на линейном участке ВАХ, где они эквивалентны резисторам с сопротивлением 100 Ом.

143. При небольшой температуре лампа подобна резистору с некоторым сопротивлением R_0 , её вольт-амперная характеристика — отрезок прямой, проходящей через начало координат. С увеличением тока характеристика отклоняется от прямой линии, «загибается» вниз, примерно так, как на рисунке 98. Сопротивление лампы в расчётном режиме: $10R_0 = (U^2/P) = 880$ Ом. Когда подключены 100 ламп, ток через каждую небольшой, поэтому каждая представляет собой резистор R_0 . Ток в цепи: $I_{100} = U/(100R_0) = 25$ мА.

13.7 Треугольник-звезда, измерения, разные

144. а) $R_A = R_B = R_C = R$. б) $R_A = (R/3)(1 - 2\alpha/3)$, $R_B = R_C = (R/3)(1 + 2\alpha/3)$. в) $R_A = R_1R_2/R_0$, $R_B = R_1R_3/R_0$, $R_C = R_2R_3/R_0$, где $R_0 = R_1 + R_2 + R_3$.

145. а) $5R/2$ б) R .

146. $R_{DB} = r/2$, $R_{AC} = (r/2)(1 + \alpha/2)$, $R_{AD} = R_{BC} = (r/2)(1 + \alpha/8)$.

147. Нельзя. Для доказательства можно сравнить сопротивление квадрата между соседними вершинами и сопротивление между вершинами, лежащими на одной диагонали. Для звезды они одинаковые.

148. Для звезды из четырёх резисторов $N = 3 + 2 + 1 = 6$. Резисторы должны быть соединены в виде треугольной пирамиды. Для звезды из пяти: $N = 4 + 3 + 2 + 1 = 10$.

149. а) $17R/5$. б) 16 Ом.

150. а) Прямая: $U(I) = \mathcal{E} - Ir$. б) Данные довольно точно ложатся на прямую. Используя график, определяем: $\mathcal{E} = 4,6$ В, $r = 3$ Ом. Погрешность — не менее погрешности амперметра, которая имеет оценку сверху: $\delta I/I = 2,5/50 = 5\%$.

151. $\mathcal{E}_x = \mathcal{E}_0(L_x/L_0)$.

152. $|R_x - R_y| = \sigma|L_x - L_y|$, $\sigma = R_0/L_0$.

153. а) Соединяя проводом как показано на рис.120 (а), измеряем между точками А и В, получаем сопротивление $R_{2\parallel 3}$. Можем составить уравнение: $(1/R_{2\parallel 3}) = (1/R_2) + (1/R_3)$. Аналогичным образом получаем ещё два уравнения, замыкающие линейную систему, решив которую, находим: $(1/R_1)$, $(1/R_2)$, $(1/R_3)$. б) Соединяем, как показано на рисунке. Измеряем между В и С. Получаем уравнение: $(1/R_{BC}) = (1/R_2) + (2/R)$. Похожих уравнений будет ещё 2. Всего, таким образом, три, а неизвестных — 4. Четвёртое уравнение получаем, замыкая одновременно А, В и С, и измеряя между А и D: $(1/R_{AD}) = (1/R_1) + (1/R_2) + (1/R_3)$. В общем случае, когда все боковые сопротивления разные, определить нельзя. Схема представляет собой тетраэдр, а он эквивалентен звезде из четырёх резисторов. в) Замыкаем, как на рисунке. Получим $R_{3\parallel 4}$, составляем уравнение. Всего можно получить 6 уравнений для 6 неизвестных.

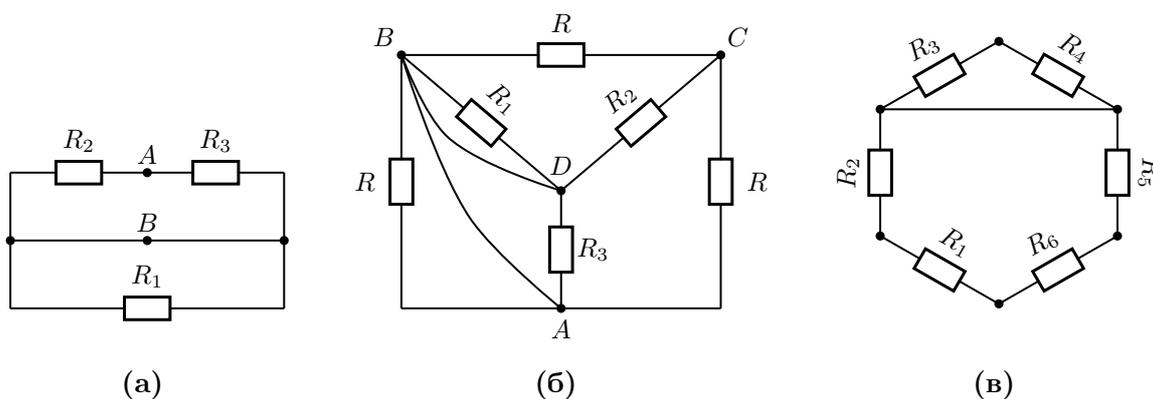


Рис. 120

154. $\eta = 5/12 \approx 42\%$.

155. $i = I_0 U_0 / (U_0 + I_0 R)$.

156. $I_{CD} = 1 \text{ A}$.

14 Ссылки на полезные статьи

Далеко не все статьи, ссылки на которые приводятся ниже, очень понятные. В некоторых есть неточности. Тем не менее, ознакомиться с ними будет полезно. Статьи, которые мы настоятельно рекомендуем к прочтению, отмечены значком на полях. Некоторые статьи могли бы быть упомянуты в двух или трёх разделах. Мы даём ссылку в одном.

Основные понятия

[1] Лукьянов А.А., [Электрический ток в числах — больших и малых.](#) // Потенциал, 2009, №6, с.37-46.

Симметричные схемы. Перемычки и амперметры.

 [2] Бондаров М.Н., [Расчёт сопротивления электрической цепи.](#) // Потенциал, 2010, №2, с.33-43.

[3] Хацет А., [Методы расчета эквивалентных сопротивлений](#) // Квант, 1972, №2, с.54-59.

[4] Петросян В.Г. и др., [Методы расчета резисторных схем постоянного тока](#) // Физика: Прилож. к газ. «Первое сентября», 2002, № 14, № 18, № 22.

[5] Соколов Е., [И снова задачи на сопротивления.](#) // Квант, 2011, №3, с.37-46.

Электроизмерительные приборы.

 [6] Ефимов В.В., [Идеальные и реальные вольтметры и амперметры в цепях постоянного тока](#)// Потенциал, 2007, №2, с.28-39.

[7] Мукушев Б., [Электрические цепи с измерительными приборами](#) // Квант, 2014, №4, с.39-42.

Работа и мощность тока. ЭДС.

 [8] Кикоин А., [Что такое э.д.с.?](#) // Квант, 1978, №4, с.42-47.

[9] Чивилёв В.И., [Закон Ома для участка цепи, содержащего ЭДС.](#) // Потенциал, 2010, №3, с.32-39.

[10] Асламазов Л., [Работа и мощность электрического тока](#) // Квант, 1979, №3, с.45-49.

Вольт-амперные характеристики

[11] Проскурин М.Б., [Исследование электрических чёрных ящиков на постоянном токе.](#) // Потенциал, 2009, №8, с.29-37.

[12] Можяев В.В., [Нелинейные элементы в электрических цепях.](#) // Потенциал, 2005, №5, с.20-27.

Преобразование треугольник-звезда

[13] Зильберман А.Р., [Преобразование электрических цепей.](#) // Квант, 2002, №3, с.30-34.